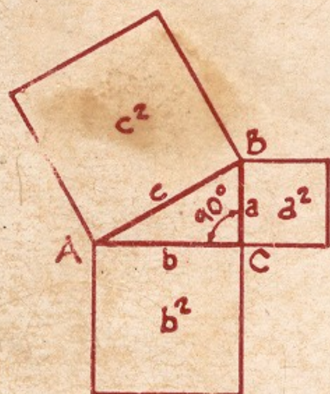
GEOMETRIA PLANA Y DEL ESPACIO

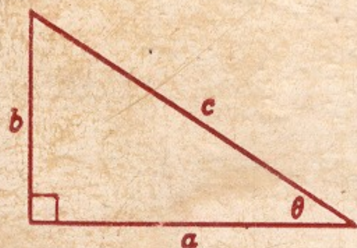


por

JORGE WENTWORTH

y

DAVID EUGENIO SMITH





EDITORIAL PORRÚA, S. A.
AV. REPÚBLICA ARGENTINA, 15
MÉXICO, 1972

Gustavo Montaño Bermudez

GEOMETRIA PLANA Y DEL ESPACIO



POR

JORGE WENTWORTH

Y

DAVID EUGENIO SMITH



EDITORIAL PORRÚA, S. A.

AV. REPÚBLICA ARGENTINA, 15

MÉXICO, 1972

GUSTAVO MONTAÑO BERMUDEZ

Primera edición mexicana

Todas las características de esta edición son propiedad de la
EDITORIAL PORRÚA, S. A.
Av. República Argentina, 15, México 1, D. F.

Queda hecho el depósito que marca la ley

Impreso en México
Printed in Mexico

PREFACIO

Al preparar la edición de que se ha hecho la presente traducción, nos hemos guiado por ciertos principios generales y por las conclusiones a que, tras detenido estudio de los mejores textos y métodos de enseñanza empleados en los varios países de lengua castellana, hemos llegado respecto a las necesidades de sus escuelas. Bueno será exponer sucintamente los rasgos distintivos de esta obra.

Hoy se reconoce universalmente que los estudios geométricos son de importancia tal, que deben formar parte de todo plan racional de enseñanza. No es ya la geometría ciencia que sólo estudian los eruditos ni que se enseña sólo a alumnos de inteligencia privilegiada o de excepcionales aspiraciones. Mas, por lo mismo que debe enseñarse a mayor número de alumnos y a alumnos de toda condición, es preciso exponerla de conformidad con los últimos principios de la pedagogía moderna. Ha sido nuestro propósito, que nos hemos esmerado en llevar a cabo, juntar al rigor de la lógica la sencillez que la claridad exige, y hemos dado a la página una forma especial que no sólo presenta mejor apariencia sino que pone de manifiesto al alumno los diferentes pasos que ordenadamente se van dando, sea en la demostración de un principio general, sea en la resolución de un problema.

Para que el discípulo adquiera el hábito de dar las demostraciones en toda su plenitud, se ha adoptado el plan de darlas al principio en esa forma. No hay peligro de que esto produzca la idea de que basta aprenderlas de memoria, ni es ése su objeto. El gran número de ejercicios diseminados en todo el texto sirven

para poner a prueba los conocimientos e inteligencia del alumno, quien no podrá resolverlos sin haber comprendido bien los teoremas en que se fundan o las operaciones que exigen. Estos ejercicios son al principio de suma sencillez, y aumentan en dificultad de manera tan gradual, que el alumno apenas si se da cuenta de los grandes progresos que va haciendo. Se ha dado gran número de ellos, no para que se estudien todos, sino para que el maestro tenga dónde escoger los que mejor se adapten a su plan de enseñanza y a las necesidades de sus alumnos.

Las definiciones se van dando a medida que se van necesitando. La introducción contiene algunos problemas sencillos, cuyo objeto es acostumbrar al estudiante al uso de los instrumentos principales de dibujo. Hácese también uso frecuente del álgebra elemental, para hacer ver las útiles aplicaciones de esta ciencia.

El arreglo de las proposiciones está fundado en el de los textos mejores de todos los países. La experiencia de muchos años y de millares de escuelas ha demostrado sus grandes ventajas.

El traductor ha adoptado algunos términos y expresiones como *perpendicular bisectriz* y *bisectar* (la Academia trae *biseca*) que, si bien inusitados o poco usados en castellano, son de indiscutable utilidad y no pueden tacharse de incorrectos. También ha seguido el sistema inglés y norteamericano de escribir las abreviaturas referentes a decimales después del número completo y no después de los enteros: 4,36 km., y no 4^{km}, 36.

Abrigamos la esperanza de que nuestra humilde obra reciba en los países de lengua castellana la buena acogida que ha tenido en los de lengua inglesa.

JORGE WENTWORTH
DAVID EUGENIO SMITH

TABLA GENERAL DE MATERIAS

[El índice alfabético se halla al fin de la obra]

GEOMETRÍA PLANA

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

Circunf.	circunferencia.	$>$	mayor que.
Constr.	construcción.	$<$	menor que.
Fig.	figura.	$\parallel$	paralelo, paralela.
Hipót.	hipótesis.	$\perp$	perpendicular.
Ident.	identidad.	$\angle$	ángulo, el ángulo.
L.C.D.D.	lo cual debíamos demostrar.	$\triangle$	triángulo, el triángulo.
		▱	paralelogramo.
N.°	número.	$\square$	rectángulo.
Prop.	proposición.	$\odot$	círculo.
rt.	recto, rectos.	$\therefore$	luego, de donde.

El plural de una palabra representada por un símbolo se indica poniendo una *s* al símbolo: $\angle s$, *ángulos, los ángulos*; $\perp s$, *perpendiculares*; $\parallel s$, *paralelos, paralelas*; $\triangle s$, *triángulos, los triángulos*.

ABREVIATURAS Y SÍMBOLOS

Circunf.	circunferencia.	$>$	mayor que.
Constr.	construcción.	$<$	menor que.
Fig.	figura.	$\parallel$	paralelo, paralela.
Hipót.	hipótesis.	$\perp$	perpendicular.
Ident.	identidad.	$\angle$	ángulo, el ángulo.
L. C. D. D.	lo cual debíamos demostrar.	$\triangle$	triángulo, él triángulo.
		▱	paralelogramo.
N.°	número.	$\square$	rectángulo.
Prop.	proposición.	$\odot$	círculo.
rt.	recto, rectos.	$\therefore$	luego, de donde.

El plural de una palabra representada por un símbolo se indica poniendo una *s* al símbolo : $\angle$s, *ángulos, los ángulos* ; $\perp$s, *perpendiculares* ; $\parallel$s, *paralelos, paralelas* ; $\triangle$s, *triángulos, los triángulos.*

GEOMETRÍA PLANA

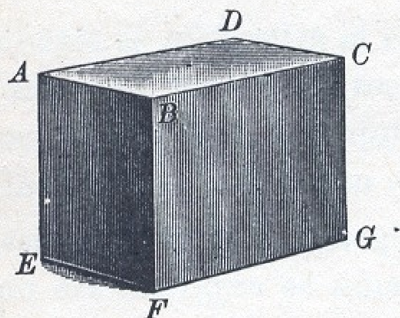
INTRODUCCIÓN

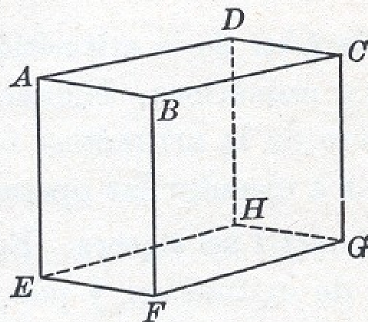
1. Carácter de la aritmética. En la aritmética se estudian los cálculos numéricos. Hácese a veces uso de las fórmulas; mas el objeto de la aritmética no es tanto el establecerlas como el enseñar a ejecutar las operaciones necesarias para aplicarlas.

2. Carácter del álgebra. En el álgebra se generalizan las cuestiones de aritmética, y por lo común se expresan las reglas y teoremas por medio de fórmulas. Así, en vez de decir que el área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura, se establece la fórmula $A = bh$. Aun cuando la aritmética se vale algunas veces de las ecuaciones, no lo hace tan a menudo como el álgebra, que resuelve casi todo problema por medio de ellas. En resumen, el álgebra es una extensión y generalización de la aritmética.

3. Carácter de la geometría. Vamos ahora a entrar en un ramo de las matemáticas que difiere radicalmente de la aritmética y el álgebra; ramo que, si bien hace uso frecuente de cálculos numéricos, ecuaciones y fórmulas, tiene por objeto principal el estudio de las *formas* o *figuras*, tales como rectángulos, triángulos y círculos, de que la aritmética y el álgebra no dan más que ideas muy generales, y cuyas propiedades se enuncian en estas ciencias, pero no se demuestran. Toca a la geometría dar demostraciones de tales propiedades: así, ella demuestra rigorosamente que el cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.

4. Cuerpo. El bloque que aquí se representa es un *cuerpo*: es una porción limitada de materia. La geometría, sin embargo, no tiene nada que ver con la sustancia de que los cuerpos se componen; ella se ocupa únicamente de la *forma* y el *tamaño* de los cuerpos, tales como los representa la segunda de estas dos figuras. Considerados desde este punto de vista, los cuerpos se llaman *cuerpos geométricos*, o *sólidos geométricos.*





Por ejemplo, una varilla es un cuerpo físico: si se introduce en greda, el agujero que deja, aun cuando esté vacío, es un cuerpo o sólido geométrico.

5. Sólido geométrico. Llámase pues *sólido geométrico*, o *sólido* brevemente, un espacio limitado cualquiera. El nombre, como se dijo en el número anterior, se aplica con igual propiedad sea que este espacio esté del todo vacío, sea que esté ocupado por alguna sustancia.

6. Dimensiones. El sólido del n.º 4 tiene tres *dimensiones* bien definidas, a saber:

1) la *longitud*, que puede medirse de A a D;
2) la *anchura*, que puede medirse de A a B;
3) la *profundidad* o *altura*, que puede medirse de A a E.

Dícese en general que todo sólido tiene tres dimensiones, aunque en algunos, como en una bola (esfera) o en un sólido de la forma de una manzana, no puede con propiedad decirse que tienen longitud, anchura y profundidad. Sin embargo, de todo sólido puede cortarse o sacarse un bloque de la forma representada en el n.º 4, en que las tres dimensiones se ven con toda claridad.

7. Superficie. El sólido del n.º 4 tiene seis caras, cada una de las cuales es una *superficie.* Si estas caras se pulen y alisan de modo que una regla puesta sobre una de ellas tenga todos sus puntos en contacto con la superficie, las caras se llaman *superficies planas*, o *planos.*

Estas superficies son los límites del sólido. Carecen de espesor, lo mismo que la sombra de un objeto. El espesor de una lámina de oro puede ser tan pequeño que no sea posible ni percibirlo; sin embargo, la lámina es un sólido limitado por superficies y que tiene por tanto tres dimensiones. Reduciendo el espesor hasta hacerlo casi nulo nos aproximamos a lo que en geometría se entiende por superficie, esto es, a algo que carece en absoluto de espesor.

En general, dase el nombre de *superficie* al límite de los sólidos. Para expresar que las superficies carecen de espesor, se dice que *tienen sólo dos dimensiones.*

8. Línea. Vese en el sólido del n.º 4 que cada dos superficies contiguas se cortan en una *línea.* Así pues, se da el nombre de *línea* al límite de una superficie.

La línea tiene sólo una dimensión, a saber: longitud. No tiene ni espesor ni anchura.

Un hilo, por delgado que sea, tiene tres dimensiones, y es por tanto un sólido, no una línea. Si el grueso del hilo se reduce sin cesar, el hilo se aproxima más y más a lo que la geometría llama línea, si bien nunca puede llegar a ser una verdadera línea.

9. Magnitudes geométricas. Los sólidos, las superficies y las líneas se llaman *magnitudes geométricas.*

10. Punto. En el sólido del n.º 4, las líneas que se encuentran se encuentran en *puntos.* Como se ve, un *punto* es el límite de una línea, y carece a la vez de longitud, anchura y espesor.

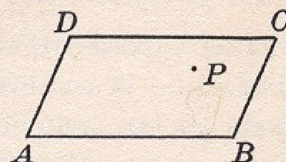
Defínese también el punto diciendo que es lo que tiene posición solamente y carece de dimensiones.

El punto puede siempre concebirse o imaginarse, sea como el extremo de una línea, sea como la intersección de dos líneas. Asímismo, la intersección de dos superficies es una línea.

11. Representación del punto y de las magnitudes geométricas. El punto y las magnitudes geométricas se representan en el papel por medio de dibujos, o *figuras.*

Un punto se representa por una ligera marca, como indica P en esta figura.

Una línea se representa por una raya. Nómbrase por letras escritas en sus extremos, como AB.



Una superficie se representa por las líneas que la limitan, y se nombra por letras puestas en puntos convenientes de esas líneas, como se ve en $ABCD$.

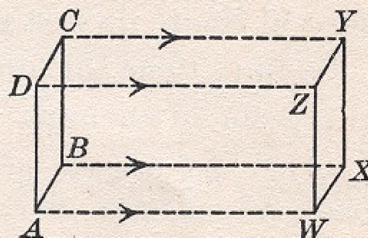
Los sólidos se representan por las superficies que los limitan, como se ve en las figuras del n.º 4.

12. Generación de las magnitudes geométricas. Las magnitudes geométricas pueden suponerse engendradas así:

1) la línea por el movimiento de un punto;
2) la superficie por el movimiento de una línea;
3) el sólido por el movimiento de una superficie.

Supóngase que la superficie $ABCD$ se mueve a la posición $WXYZ$, según indican las puntas de flecha. En este movimiento,

1) A engendra la línea AW;
2) AB engendra la superficie $AWXB$;
3) $ABCD$ engendra el sólido AY.



Una línea no puede engendrar una superficie si sólo se desliza sobre sí misma, ni una superficie engendrar un sólido moviéndose de igual manera.

13. Figura geométrica. Llámase *figura geométrica,* o brevemente *figura,* todo punto, línea, superficie o sólido, o en general, toda combinación de puntos.

14. Definición y divisiones de la geometría. La *geometría* es la ciencia que trata de las figuras geométricas.

La *geometría plana* trata de las *figuras planas,* o sea de las figuras cuyas partes están todas en un mismo plano.

La *geometría del espacio* trata de las figuras que no son planas.

15. Línea recta. Llámase *línea recta,* o *recta* simplemente, toda línea tal que, si una parte cualquiera de ella se coloca *de cualquier modo* con sus extremos sobre otra parte cualquiera, las dos partes coinciden en todos sus puntos.

Por ejemplo, AB es una recta; porque si se toma una parte cualquiera de ella, como 1 centímetro, y se coloca *de cualquier modo* por sus extremos sobre otra parte, coincidirá en todos sus puntos con esa otra parte.



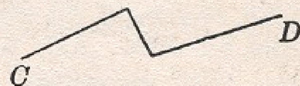
Con respecto a una recta, se denomina *segmento* una parte determinada cualquiera de esa recta.

16. Igualdad de las figuras geométricas. Dos segmentos de recta son *iguales* cuando pueden colocarse de tal modo que los extremos del uno coincidan con los extremos del otro.

En general, dícese que dos figuras cualesquiera son *iguales* cuando pueden hacerse coincidir en todos sus puntos.

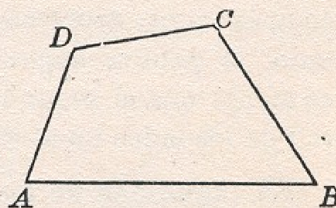
17. Línea quebrada. Llámase *línea quebrada* la que se compone de dos o más rectas distintas.

La línea CD es una línea quebrada.



18. Figura rectilínea. Llámase *figura rectilínea* la que se compone de líneas rectas.

Por ejemplo, $ABCD$ es una figura rectilínea.



19. Línea curva. Llámase *línea curva,* o brevemente *curva,* toda línea que no es recta ni tiene partes rectas.

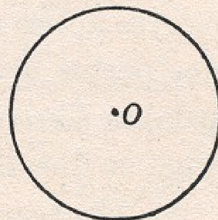
Por ejemplo, EF es una curva.



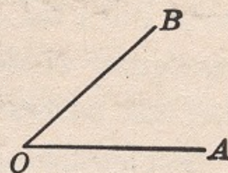
20. Figura curvilínea. Llámase *figura curvilínea* la que se compone de una o más líneas curvas.

Por ejemplo, el círculo O es una figura curvilínea, cuya forma es bien conocida.

Cuando se trata de una superficie limitada por curvas, tanto la superficie misma como el conjunto de las curvas que la limitan se llaman figuras curvilíneas.

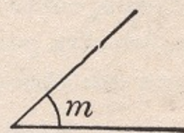


21. Ángulo. Llámase *ángulo* la abertura entre dos rectas que se encuentran.

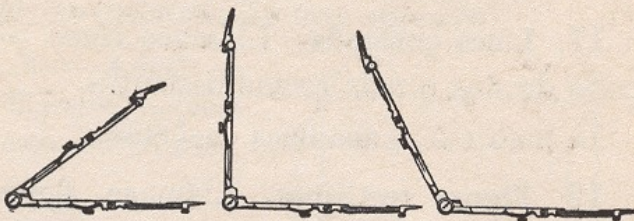


Las dos rectas que se encuentran se llaman *lados* del ángulo, y el punto en que se encuentran, *vértice* del ángulo.

Un ángulo puede nombrarse por tres letras, una escrita en cada uno de los lados, y la otra en el vértice. La del vértice se nombra entre las otras dos: ángulo AOB. También se nombra un ángulo por medio de una letra puesta en el vértice: ángulo O; o entre los lados del ángulo: ángulo m. A veces, para mayor claridad, se traza una curva entre los lados del ángulo, y sobre ella se escribe la letra, como se ve en m.

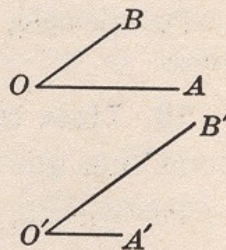


22. Tamaño o magnitud de un ángulo. La magnitud de un ángulo depende únicamente de la magnitud del movimiento necesario para llevar un lado, haciéndolo girar sobre el vértice, a la posición del otro. Este movimiento se llama *rotación.*



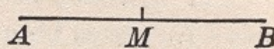
Un ángulo es mayor que otro cuando la rotación es mayor en aquél que en éste. Así, para las tres aberturas del compás aquí representado, el primer ángulo es menor que el segundo, y el segundo menor que el tercero. La longitud de los lados no afecta la magnitud de un ángulo.

23. Igualdad de los ángulos. Dos ángulos son *iguales* cuando el uno puede colocarse sobre el otro de manera que los vértices coincidan y los lados del uno queden sobre los del otro.



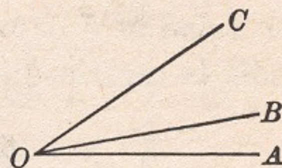
Por ejemplo, los ángulos AOB y $A'O'B'$ son iguales.

24. Bisector, bisectriz. El adjetivo *bisector* (femenino *bisectriz*) se aplica a todo punto, línea o plano que divide una figura en dos partes iguales. En el caso de la recta, la palabra *bisectriz* se emplea como sustantivo, y así se dice la *bisectriz* de un ángulo en vez de la *línea bisectriz.*



En esta figura, M, punto medio de AB, es el punto bisector de AB

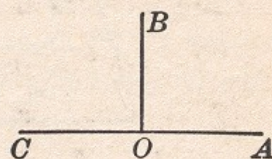
25. Ángulos adyacentes. Se dice que dos ángulos son *adyacentes* cuando tienen un mismo vértice y un lado común, y son exteriores el uno al otro.



Los ángulos AOB y BOC son adyacentes.

La definición que acaba de darse es hoy la generalmente adoptada. Según otra definición, dos ángulos son *adyacentes* cuando tienen un lado común y los otros dos lados en una misma recta, como AOB y BOC en el n.º 26. No debe olvidarse esta distinción.

26. Ángulo recto. Cuando una recta encuentra otra formando con ella ángulos adyacentes iguales, éstos se llaman ángulos *rectos*.

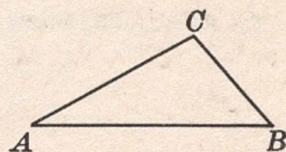


Tales son AOB y BOC.

27. Perpendicular. Dícese que una recta es *perpendicular* a otra, o que las dos rectas son *perpendiculares entre sí*, cuando los ángulos que forman la una con la otra son ángulos rectos.

En la figura anterior, AC y BO son perpendiculares entre sí. El punto O es el *pie* de la perpendicular BO.

28. Triángulo. Llámase *triángulo* el espacio limitado por tres rectas que se cortan.



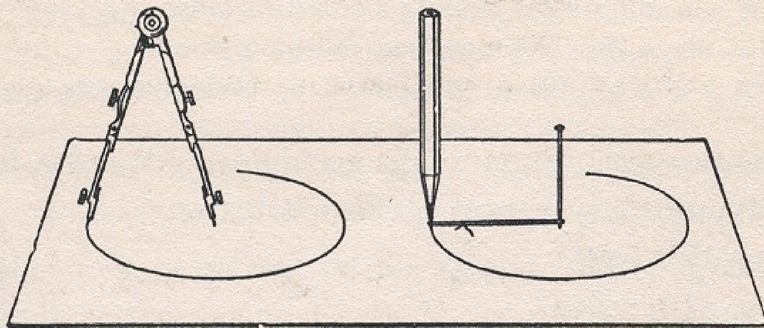
En el triángulo ABC, AB, BC y CA son los *lados*. La suma de los lados se llama *perímetro* del triángulo. Los vértices de los ángulos A, B, C se llaman *vértices* del triángulo.

29. Círculo. Llámase *círculo* una superficie plana limitada por una curva que tiene todos sus puntos a igual distancia de un punto fijo interior. Este punto se llama *centro* del círculo.



La curva se llama *circunferencia*, y a veces *círculo* también. *Arco* es una parte cualquiera de la circunferencia. *Radio* es cualquier recta que va del centro a la circunferencia. *Diámetro* es toda recta que pasa por el centro y cuyos extremos están en la circunferencia.

30. Instrumentos. Para las construcciones que se requieren en el estudio de la geometría bastan dos instrumentos: la regla y el compás. Las escuadras y la regla T son de grandísima utilidad al dibujante; mas el alumno debe por ahora emplear sólo la regla ordinaria y el compás.



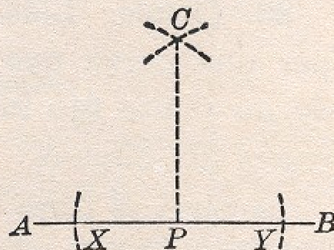
En la clase, una cuerda puede emplearse para describir círculos en la pizarra.

31. Ejercicios en el uso de los instrumentos. Los simples problemas que se dan a continuación tienen por objeto acostumbrar al estudiante a emplear los instrumentos. No se dan aquí demostraciones, las cuales vendrán después, cuando se hayan expuesto los principios en que las construcciones se fundan.

Si se quiere, estos problemas pueden suprimirse o estudiarse más tarde.

EJERCICIO 1.º

1. En un punto dado de una recta dada, levantar una perpendicular a la recta.

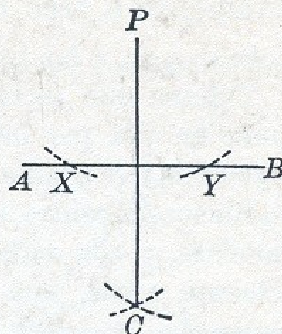


Sean AB la recta y P el punto dado.

Se trata de levantar en el punto P una perpendicular a AB.

Haciendo centro en P, y con un radio conveniente, descríbanse arcos que corten AB en X e Y. Con X por centro y XY por radio descríbase un arco, y con Y por centro y con el mismo radio descríbase otro arco, que cortará al primero en un punto C. Trácese con la regla una recta que pase por B y C, la cual será la perpendicular pedida.

2. De un punto dado fuera de una recta, trazar una perpendicular a la recta.



Sean AB la recta y P el punto dado.

Se trata de bajar del punto P una perpendicular a la recta AB.

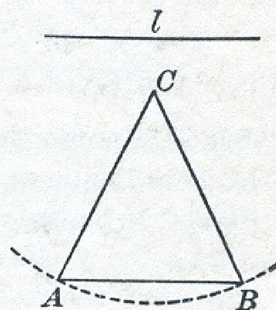
De P como centro, y con un radio conveniente, descríbanse arcos que corten AB en X e Y.

Haciendo centro primero en X y luégo en Y, descríbanse con un mismo radio dos arcos que se corten en un punto C.

Trácese con la regla una recta por P y C, la cual será la perpendicular que se busca.

En los ejercicios 1 y 2, córtese el papel según la recta PC, y véase si las dos partes así obtenidas pueden superponerse por la línea de corte de modo que los dos segmentos de AB coincidan.

3. Dibujar un triángulo en que dos de los lados sean iguales a una recta dada.



Sea l la recta dada.

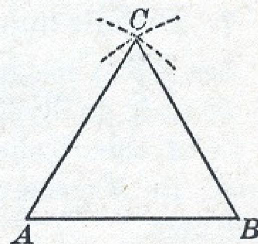
Se desea construír un triángulo en que dos de los lados sean iguales a l.

Haciendo centro en un punto cualquiera C, descríbase un arco con un radio igual a l.

Únanse entre sí dos puntos cualesquiera del arco, como A y B, por una recta, y de A y B trácense rectas a C.

El triángulo ABC es el buscado.

4. Construír un triángulo cuyos lados sean todos iguales a una recta dada.



Sea AB la recta dada.

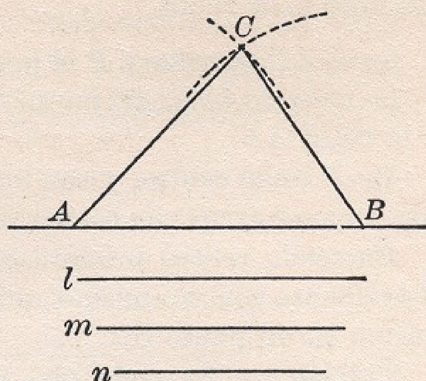
Se trata de construír un triángulo cuyos lados sean iguales a AB.

Haciendo centro en A y en B, y con radio AB, descríbanse arcos que se corten en C. Trácense las rectas AC y BC.

El triángulo ABC es el pedido.

En problemas como éste, no se traza de los arcos más de lo necesario para determinar su intersección.

5. Construír un triángulo cuyos lados sean iguales respectivamente a tres rectas dadas.



Sean *l*, *m*, *n* las tres rectas dadas.

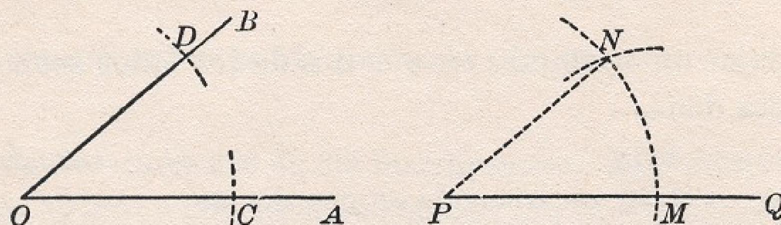
Trácese una recta cualquiera y márquese en ella por medio del compás un segmento *AB* igual a *l*.

Haciendo centro en *A* y *B*, respectivamente, y con radios iguales a *m* y *n*, trácense arcos, que se cortarán en un punto *C*.

Trácense *AC* y *BC*.

El triángulo *ABC* es el buscado.

6. Por un punto dado de una recta, trazar una recta que forme con la primera un ángulo igual a un ángulo dado.



Sea *P* el punto dado de la recta dada *PQ*, y sea *AOB* el ángulo dado.

¿Qué es lo que se busca?

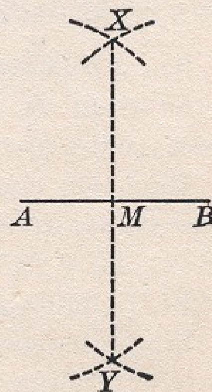
Haciendo centro en *O*, descríbase con un radio cualquiera un arco, que cortará a *OA* y *OB* en *C* y *D* respectivamente.

Haciendo centro en *P*, y con un radio igual a *OC*, trácese un arco, que cortará a *PQ* en *M*.

Con *M* por centro y un radio igual a la distancia *CD*, trácese un arco, que cortará al precedente en un punto *N*, y trácese *PN*.

El ángulo *MPN* es el ángulo pedido.

7. Dividir una recta dada en dos partes iguales.



Sea *AB* la recta dada.

Se trata de dividir *AB* en dos partes iguales.

De *A* como centro y con *AB* por radio trácese un arco. De *B* como centro, y con el mismo radio, trácese otro arco.

Estos dos arcos se cortarán en dos puntos *X* e *Y*.

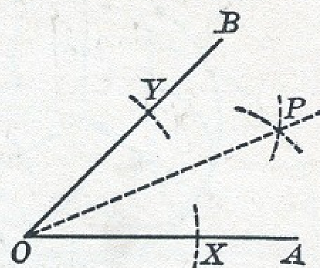
Trácese la recta *XY*.

Esta recta corta *AB* en *M*, punto medio de *AB*

8. Trazar la bisectriz de un ángulo dado.

Sea AOB el ángulo dado.

Haciendo centro en O, y con un radio conveniente, trácese un arco que corte a OA en X y a OB en Y.

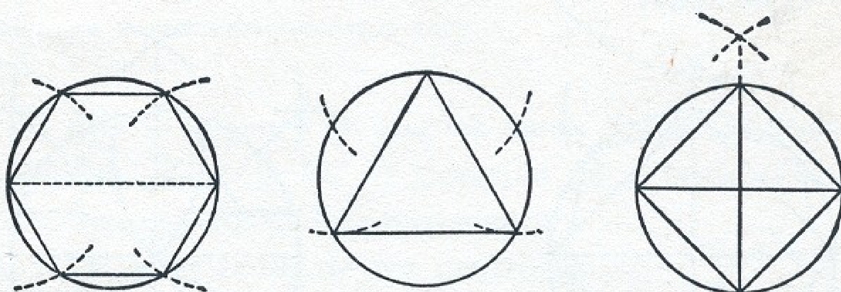


De X como centro, y con XY por radio, trácese un arco, y trácese otro análogo con el mismo radio, haciendo centro en Y. Sea P el punto de intersección de estos dos arcos.

Trácese la recta OP.

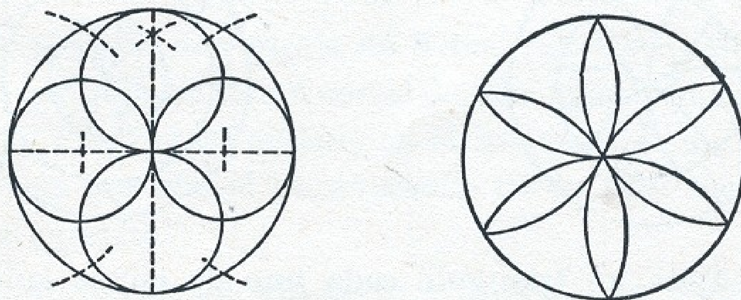
Esta recta es la bisectriz del ángulo.

9. Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:



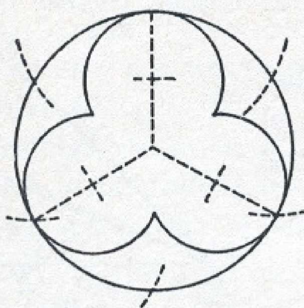
Las líneas de puntos indican la manera de determinar ciertos puntos, y pueden borrarse cuando se termine el dibujo. Líneas que, como éstas, son auxiliares en la construcción de una figura se hacen casi siempre de puntos.

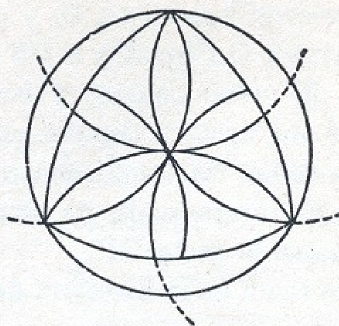
10. Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:



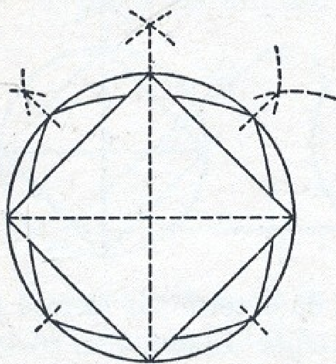
Como se ve en estas figuras y en la primera del n.º 9, el radio de un círculo puede emplearse para describir arcos consecutivos que dividan la circunferencia en seis partes iguales.

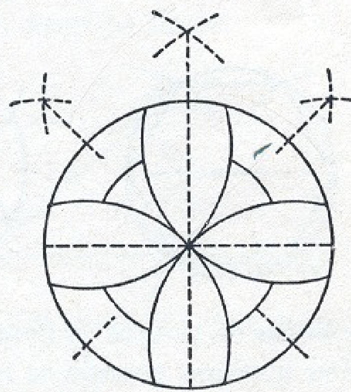
11. Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:



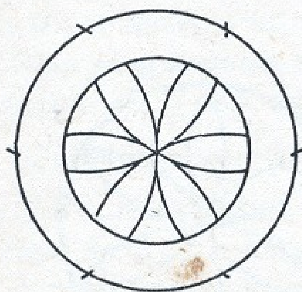


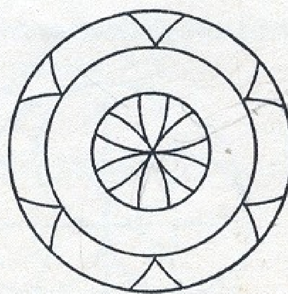
12. Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:





13. Dibújense las figuras siguientes, empleando para ello la regla y el compás:



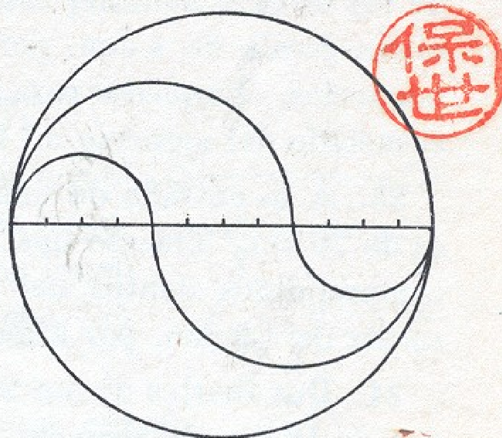


14. Dibújese un triángulo cada uno de cuyos lados tenga 3 cm. de longitud.

15. Trácense dos rectas perpendiculares entre sí y que se dividan mutuamente en dos partes iguales.

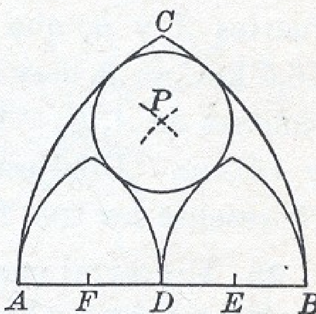
16. Biséctese cada uno de los cuatro ángulos rectos formados por dos rectas perpendiculares entre sí.

17. Trácese una recta de 36 mm. de longitud, y divídase en doce partes iguales (3 mm. cada una) por medio de una regla graduada. Dibújese luégo la figura que aquí se representa.



Completando cada uno de los semicírculos que se ven en esta figura se obtiene otra figura de forma también interesante. Se aconseja al estudiante que se ejercite en formar combinaciones análogas, que a menudo resultan muy artísticas.

18. El dibujo adjunto se emplea en la construcción de ventanas góticas. El arco BC se describe de A como centro, con radio AB. Los centros de los arcos menores son A, D, B, y el radio de los cuatro es AD. El centro P se determina describiendo arcos con A y B por centros y AE por radio. ¿Cómo pueden hallarse los puntos D, E, F? Dibújese la figura.



19. Dibújese un triángulo de lados de 30 mm. Biséctense los lados, y haciendo centro en los puntos medios, descríbanse tres círculos con un radio de 15 mm.

20. Empleando una escala de 5 mm. por metro, dibújese un cuadrado que represente un corral de 25 m. por lado, e indíquese con un punto un poste situado en el interior a 5 m. de un lado y en la recta que une el punto medio de ese lado con el punto medio del opuesto.

21. Dibújese un ángulo recto y, empleando una escala de 3 mm. por kilómetro, mídase sobre un lado una distancia de 10 km. y sobre el otro una de 15 km. Determínese la distancia en kilómetros de un extremo al otro.

22. Uno de los pisos de un edificio es un gran cuarto de 25 m. de largo por 15 m. de ancho, dividido al través en tres compartimientos por tabiques, uno en el centro, y cada uno de los otros a 6 m. del extremo respectivo. Dibújese el plano según escala de 4 mm. por metro, representando los tabiques por rectas. Empléese para la construcción de los ángulos rectos el método del ejercicio n.° 1.

23. A la entrada de una bahía hay un cañón cuyo alcance es de 20 km. Trácese una línea que encierre todos los puntos comprendidos dentro del alcance del cañón, empleando una escala de 1,5 mm. por kilómetro.

24. Dos fuertes distan 26 km. el uno del otro, y tienen cañones de 16 km. de alcance. Dibújese, en escala de 1,5 mm. por kilómetro, el campo común al alcance de los dos cañones.

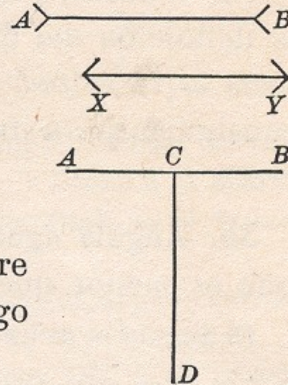
25. A la entrada de una bahía, en lados opuestos, hay dos fuertes A y B, que distan 24 km. entre sí. A 18 km. de A y 16,5 km. de B, hay en la bahía una isla con un fuerte C. Los cañones de A, B, C tienen respectivamente alcances de 18, 16,5 y 15 km. Dibújese, según escala conveniente, un plano que represente los tres fuertes y el campo de acción de cada cañón.

26. Un corral cuadrado de 16 m. por lado tiene cuatro postes en las esquinas. Un caballo se ata durante un día a uno de los postes con 8 m. de cuerda, durante otro día a otro de los postes, y así de los otros dos. Dibújese, según escala de 2,5 mm. por metro, un plano que indique la superficie en que el caballo puede pacer durante los cuatro días.

27. Un jardinero proyectó parte de un jardín así: Primero construyó un triángulo ABC, con lados de 4,8 m., y luégo bisectó dos de los ángulos. Del punto P de intersección de las bisectrices trazó las perpendiculares PX, PY, PZ a los tres lados del triángulo. Luégo trazó un círculo de P como centro, y con radio PX, el cual resultó perfectamente ajustado dentro del triángulo. Hágase esta construcción en escala de 1:50

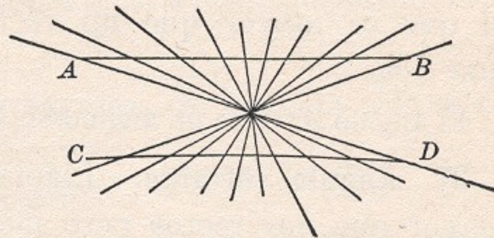
32. Necesidad de las demostraciones. Cuando se dibuja una figura que debe llenar ciertos requisitos, es preciso demostrar por el razonamiento que en efecto los llena. La vista no puede servir de guía seguro, pues a menudo engaña, como se ve en los siguientes ejemplos.

EJERCICIO 2.º



1. Cálculese a la vista la diferencia entre las longitudes de AB y XY. Mídanse luégo las dos rectas, o bien compárense sus longitudes por medio del compás o de una tira de papel.

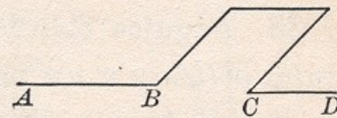
2. Cálculese a la vista la diferencia entre las longitudes de las rectas AB y CD, y luégo hágase la prueba como en el caso anterior.



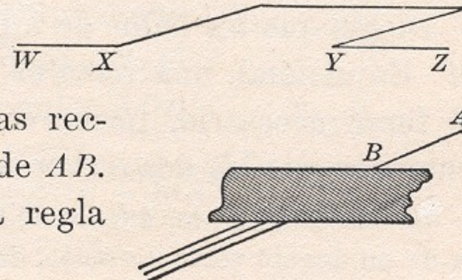
3. Examínese esta figura, y dígase si AB y CD son rectas. Hágase la prueba empleando una regla o el borde de una tira de papel.



4. Examínese esta figura y dígase si AB y CD se hallan a la misma distancia en A y C que en B y D. Hágase la prueba.

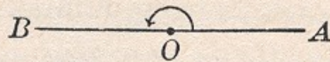


5. Obsérvese esta figura y dígase si CD es la prolongación de AB, y si YZ es la prolongación de WX. Hágase la prueba con la regla.



6. Obsérvese esta figura y dígase a la simple vista cuál de las rectas inferiores es la prolongación de AB. Hágase la prueba colocando la regla sobre AB.

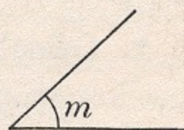
33. Ángulo de lados colineales. Llámase *ángulo de lados colineales* aquel en que los lados son el uno prolongación del otro y están por tanto en línea recta. La palabra *colineal* significa *en línea recta.*



El ángulo AOB de esta figura es un ángulo de lados colineales, y también lo es el ángulo inferior BOA.

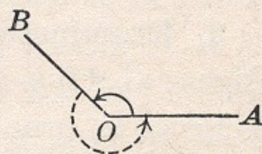
34. Relación entre el ángulo recto y el de lados colineales. De la definición del ángulo recto (n.º 26) se deduce que *un ángulo recto es la mitad de un ángulo de lados colineales,* y que por consiguiente *un ángulo de lados colineales es igual a dos ángulos rectos.*

35. Ángulo agudo. Llámase *ángulo agudo* el que es menor que un recto.



El ángulo m es un ángulo agudo.

36. Ángulo obtuso. Llámase *ángulo obtuso* el que es mayor que un recto pero menor que dos.



El ángulo AOB es un ángulo obtuso.

37. Ángulo entrante. Llámase *ángulo entrante* el que es mayor que dos rectos pero menor que cuatro.

El ángulo BOA indicado por la curva de puntos en el n.º 36 es un ángulo entrante.

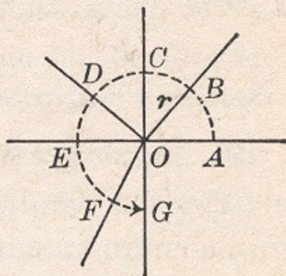
Cuando se habla del ángulo formado por dos rectas, se entiende de ordinario el que no es entrante.

38. Ángulos oblicuos. Dase algunas veces el nombre de *ángulos oblicuos* a los agudos y a los obtusos. Sin embargo, dicha expresión se usa poco, por ser de poca utilidad.

Dícese que los lados de un ángulo oblicuo son *oblicuos entre sí.* En general, una recta es *oblicua* a otra cuando, prolongada si fuere necesario, forma con ella un ángulo oblicuo; dícese entonces que las dos rectas son *oblicuas entre sí.*

La bisección de un ángulo de lados colineales da dos ángulos rectos; la de un ángulo recto u obtuso, dos agudos.

39. Generación de los ángulos. Supóngase que la recta r se hace girar sobre el punto O de la posición OA a la posición OB. En este movimiento r describe o *engendra* el ángulo agudo AOB, cuya magnitud es mayor o menor según sea mayor o menor la rotación necesaria para engendrarlo, como se explicó en el n.º 22.



Si r continúa girando, habrá engendrado, al llegar a la posición OC, un ángulo recto AOC. En esta posición, r es perpendicular a OA.

Girando hasta la posición OD, r engendra el ángulo obtuso AOD.

Si el movimiento de rotación continúa hasta que r llegue a la posición OE, que es la continuación de AO, el ángulo engendrado es el de lados colineales AOE.

Cuando r llega a la posición OF, ha engendrado el ángulo entrante AOF (la parte superior indicada por el arco ADF).

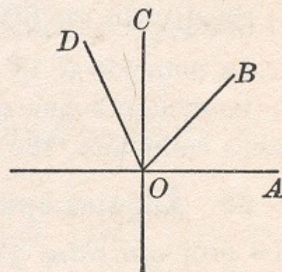
Si r continúa girando hasta volver, pasando por OG, a su posición original OA, el ángulo engendrado será igual a dos ángulos colineales, o cuatro rectos.

40. Suma y resta de rectas y ángulos. Si la recta AP se considera engendrada por un punto que al moverse engendra sucesivamente los segmentos AB, BC, CD, etc., se dice que AC es la *suma* de AB y BC; esto es,

$$AC = AB + BC;$$

de donde $$AC - BC = AB.$$

Si el ángulo AOD se considera engendrado por la rotación de OA alrededor del punto O, movimiento en que los ángulos AOB, BOC, COD son sucesivamente engendrados por la misma recta, decimos que el ángulo AOC es la suma de los ángulos AOB y BOC; esto es,



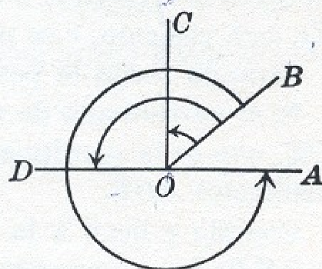
$$AOC = AOB + BOC;$$

de donde $$AOC - BOC = AOB.$$

41. Perígono. Se llama *perígono* el total de los ángulos que pueden engendrarse en un plano por la rotación completa de una recta alrededor de un punto dado; es decir, haciendo girar la recta hasta traerla otra vez a su posición primitiva.

Es evidente que un perígono es igual a dos ángulos de lados colineales, y también a cuatro rectos.

42. Ángulos complementarios, suplementarios, conjugados. Dos ángulos son *complementarios*, y cada uno es el *complemento* del otro, cuando su suma es un recto.



Dos ángulos son *suplementarios*, y cada uno es el *suplemento* del otro, cuando su suma es dos rectos.

Dos ángulos son *conjugados* cuando su suma es igual a un perígono.

Así, el complemento de AOB es BOC; el suplemento, BOD; el conjugado, el ángulo entrante BOA.

43. Propiedades de los ángulos suplementarios. Las siguientes proposiciones son evidentes:

1.ª *La suma de los dos ángulos adyacentes que una recta forma con otra es igual a dos rectos.*

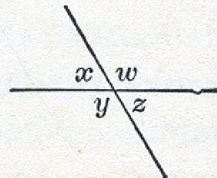
2.ª *Si la suma de dos ángulos adyacentes es dos rectos, los lados no comunes están en línea recta.*

44. Medida de los ángulos. La unidad de medida para los ángulos es $\frac{1}{360}$ de un perígono, y se llama *grado*.

Se divide en 60 *minutos*, y el minuto en 60 *segundos*.

La notación $5° 13' 12''$ significa 5 grados, 13 minutos, 12 segundos.

Es evidente que un ángulo recto tiene 90°; uno de lados colineales, 180°; y un perígono, 360°.



45. Ángulos opuestos por el vértice. Dos ángulos son *opuestos por el vértice* cuando los lados del uno son las prolongaciones de los del otro.

Los ángulos x y z son opuestos por el vértice, y también lo son los ángulos w e y.

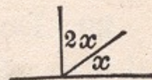
EJERCICIO 3.°

1. Hállese el complemento de 72°; de 65° 30′; de 22° 20′15″.

2. ¿Cuál es el suplemento de 45°? de 120°? de 145° 5′? de 22° 20′ 15″?

3. Hállese el ángulo conjugado de 240°; el de 280°; el de 312° 10′ 40″.

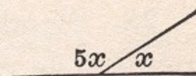
4. Si el complemento del ángulo x es $2x$, ¿cuál es el valor de x en grados?



5. Si el complemento de un ángulo x es $3x$, ¿cuál es el valor de x en grados y minutos?

6. ¿Cuál es el ángulo cuyo complemento es cuatro veces mayor que él?

7. Si el suplemento del ángulo x es $5x$, ¿cuál es el valor de x?

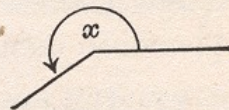


8. Si el suplemento de un ángulo x es $14x$, ¿cuál es el valor de x?

9. ¿Qué ángulo es igual al doble de su suplemento?

10. ¿Cuántos grados tiene el ángulo que es igual a su suplemento? ¿cuántos el que es igual a su complemento?

11. Si el ángulo conjugado de x es $\frac{2}{3}x$, ¿cuál es el valor de x?



12. Si el conjugado del ángulo x es $\frac{1}{2}x$, ¿cuál es el valor de x?

13. ¿Qué ángulo es igual a un tercio de su conjugado? ¿Qué ángulo es igual a su conjugado?

14. Determínense los dos ángulos x e y cuya suma es 90° y cuya diferencia es 10°.

15. Hállense dos ángulos complementarios tales que su diferencia sea 30°.

16. Hállense dos ángulos suplementarios tales que el uno sea 20° mayor que el otro.

17. La diferencia entre dos ángulos conjugados x e y es dos rectos. ¿Cuáles son esos ángulos?

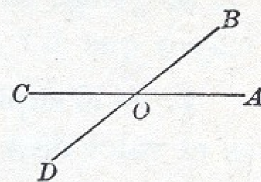
18. La diferencia entre dos ángulos conjugados x e y es cero. ¿Cuáles son los valores de x e y?

19. Dos ángulos son complementarios, y el uno es cuatro quintos del otro. Hállense sus valores.

20. Dos ángulos son suplementarios, y el uno es cinco veces el otro. Hállense sus valores.

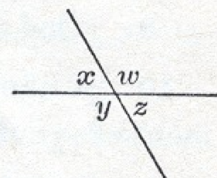
21. Hállese el número de grados en el ángulo menor formado por las manecillas del reloj a las cinco y cuarto.

22. Hállese el número de grados en el ángulo formado por las manecillas del reloj a las diez y diez.



23. Siendo el ángulo AOB de 38°, hállese el número de grados en BOC, COD y DOA.

24. Si el ángulo AOB de la misma figura es un tercio de BOC, ¿cuántos grados tiene cada uno de los cuatro ángulos?



25. En esta figura, $w = 2x$. ¿Cuántos grados tiene cada uno de los ángulos w, x, y, z?

26. Hállese el ángulo que es igual a su complemento menos 30°.

27. Hállese el ángulo que es igual a la mitad de su complemento.

28. Dibújese una figura para demostrar que si los lados exteriores de dos ángulos adyacentes están en línea recta, la suma de los ángulos es 2 rectos.

29. Dibújese una figura para demostrar que la suma de todos los ángulos formados en un mismo punto y de un mismo lado de una recta es igual a 2 rectos.

30. Dibújese una figura para demostrar que los complementos de ángulos iguales son iguales.

46. Proposición. Se llama *proposición* el enunciado de un hecho, como una ley o un principio, o el enunciado de una cuestión por resolver.

Hay ciertas clases de proposiciones que se emplean a menudo en matemáticas, y a las cuales se han dado nombres especiales, a saber: el *axioma*, el *postulado*, el *teorema*, el *problema* y el *corolario*.

47. Axioma. Llámase *axioma* una proposición que, siendo evidente, no requiere demostración.

Así las proposiciones: *La parte es menor que el todo*, *Si a cantidades iguales se agrega una misma cantidad los resultados serán iguales*, son axiomas.

48. Postulado. Llámase *postulado* una proposición cuya verdad, aunque no tenga la evidencia de un axioma, se admite sin demostración.

Es a veces difícil distinguir entre un postulado y un axioma. Tanto el uno como el otro es una suposición que se hace, algo que se da por sentado. Toda la ciencia matemática se funda en unas pocas proposiciones de esta clase. Las que son peculiares a la geometría se llaman más a menudo *postulados* que *axiomas*.

49. Teorema. Llámase *teorema* una proposición cuya verdad necesita demostración.

Así, la proposición: *El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos*, es un teorema.

50. Problema. Llámase *problema* una cuestión que se propone para resolverse. En geometría los problemas más comunes son aquellos en que se piden construcciones que llenen requisitos dados.

51. Corolario. Llámase *corolario* una proposición que es consecuencia inmediata de otra, y cuya demostración requiere poco o ningún razonamiento nuevo.

Por ejemplo, si se supone que dos ángulos cualesquiera de lados colineales son iguales, síguese como corolario que todos los ángulos rectos son iguales, puesto que un recto es la mitad de un ángulo de lados colineales.

52. Axiomas. Hé aquí algunos axiomas importantes:

1.° *Si a cantidades iguales se agregan o quitan cantidades iguales, los resultados son iguales.*

2.° *Si cantidades iguales se multiplican o dividen por cantidades iguales, los resultados son iguales.*

Este axioma no se aplica cuando el divisor es cero.

3.° *Si cantidades iguales se elevan a una misma potencia, o si a ambas se les extrae una misma raíz, los resultados son iguales.*

Cuando este axioma se aplica a la extracción de raíces, es preciso tomar éstas con un mismo signo, pues una raíz puede tener más de uno.

4.° *Si en los dos miembros de una desigualdad se ejecuta una misma operación con números positivos, el sentido de la desigualdad no se altera.*

Si, por ejemplo, $a > b$, y x e y son cantidades positivas iguales, se tiene:

$$a + x > b + y, \qquad a - x > b - y, \qquad ax > by, \qquad \frac{a}{x} > \frac{b}{y}.$$

5.° *Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido, los resultados son desiguales en el mismo sentido.*

Si, por ejemplo, $a > b$, $c > d$, se tiene también: $a + c > b + d$.

6.° *Si los dos miembros de una desigualdad se restan de los dos de una igualdad, los resultados son desiguales en sentido opuesto al de la desigualdad dada.*

Si $a > b$ y $x = y$, entonces $x - a < y - b$.

7.° *Dos cantidades iguales a una tercera lo son entre sí.*

8.° *Toda cantidad puede reemplazarse con su igual.*

9.° *Si una cantidad es mayor que otra, y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.*

Si $a > b$ y $b > c$, se tiene también: $a > c$.

10.° *El todo es mayor que cualquiera de sus partes, e igual a la suma de sus partes.*

53. Postulados. He aquí varios postulados importantes:

1.° *Por dos puntos dados cualesquiera puede hacerse pasar una recta, y sólo una.*

2.° *Toda recta puede prolongarse en ambos sentidos.*

Prolongar AB es continuarla o extenderla más allá de B; prolongar BA es continuarla más allá de A.



3.° *El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.*

4.° *Es siempre posible describir una circunferencia de centro y radio dados.*

5.° *Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones.*

6.° *Todos los ángulos de lados colineales son iguales.*

54. Corolario 1.° *Dos puntos determinan una recta.*

55. Corolario 2.° *Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.*

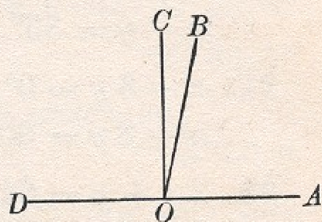
Pues si tuvieran dos o más puntos comunes coincidirían (post. 1.°).

56. Corolario 3.° *Todos los ángulos rectos son iguales.*

Porque un recto es la mitad de un ángulo de lados colineales (n.° 34).

57. Corolario 4.° *En un punto cualquiera de una recta puede levantarse una perpendicular a esa recta, y sólo una.*

En efecto, si en el punto O pudiesen levantarse dos perpendiculares OC y OB a DA, los ángulos AOB y AOC serían rectos y por tanto iguales (n.° 56), lo cual es imposible.



58. Corolario 5.° *Ángulos iguales tienen complementos iguales, suplementos iguales y conjugados iguales.*

59. Corolario 6.° *Un ángulo mayor que otro tiene menor complemento, suplemento y conjugado que ese otro.*

EJERCICIO 4.º

1. Hállese el valor del $\angle x$ en la ecuación $10° + \angle x = 27° 30'$

2. Hállese el valor del $\angle x$ en $\angle x + 37° = \frac{1}{2} \angle x + 40°$.

3. Hállese el valor del $\angle x$ en $\frac{2}{3} \angle x + \angle b = 5 \angle b$.

4. Hállese el valor del $\angle x$ en $\angle x + \angle a = 4 \angle a - \angle x$.

Hállese el valor del $\angle x$ en las siguientes ecuaciones:

5. $x + 13° = 39°$

6. $x - 17° = 46°$.

7. $2x = x + 23°$.

8. $5x = 2x + 21°$.

9. $4x = \frac{1}{2}x + 70°$.

10. $x = 0{,}7x + 33°$.

11. $x = 0{,}1x + 18°$.

12. $\frac{3}{4}x = \frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}°$.

13. $\frac{4}{5}x = 0{,}1x + 14°$.

14. $\frac{2}{3}x = \frac{1}{2}x + 2°$.

15. $12x + 17° = 9x + 32°$.

16. $5x - 22° 30' = 2x + 11°$.

17. $51° 20' - \frac{2}{3}x = 5° 1' + 3x$.

18. $73° 21' 4'' - x = 3° 3' 12'' + 4x$.

19. Hállense x e y en $x + 20° = y$, $y - 5° = 2x$.

Hállense x *e* y *en los siguientes sistemas:*

20. $x + y = 45°$,
$x - y = 35°$.

21. $x - 8y = 0°$,
$x + 8y = 80°$.

22. $2x + y = 64°$,
$3x - y = 88°$.

23. $x + 2y = 21°$,
$x + 3y = 26° 15'$.

24. $x + y = 9° 20' 15''$,
$2x - y = 12° 25' 15''$.

25. $x - y = 5' 5''$,
$3x + 4y = 14° 50' 50'$.

26. Si $x < 10°$, e $y = 7° 30'$, ¿qué se sigue en cuanto al valor de $x + y$?

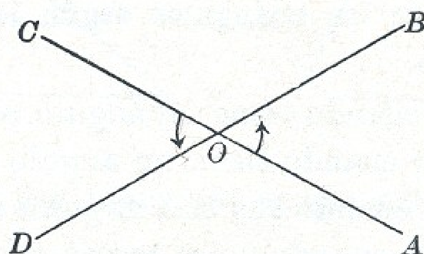
27. En el ejercicio 26, ¿qué puede decirse en cuanto al valor de la diferencia $x - y$?

LIBRO I

FIGURAS RECTILÍNEAS

Proposición I. Teorema

60. *Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.*



Sean AC y BD dos rectas que se cortan en O.

Demostrar que $\angle AOB = \angle COD.$

Demostración. $\angle AOB + \angle BOC = 2$ rt.,

$\angle BOC + \angle COD = 2$ rt. N.° 43

(*La suma de los dos ángulos adyacentes que una recta forma con otra es igual a dos rectos.*)

$\therefore \angle AOB + \angle BOC = \angle BOC + \angle COD.$ N.° 53, 6.°

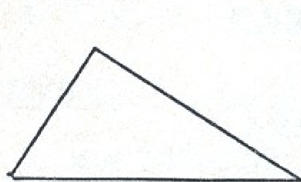
$\therefore \angle AOB = \angle COD.$ N.° 52, 1.°

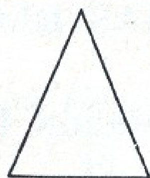
(*Si de cantidades iguales se restan cantidades iguales, los resultados son iguales.*) **L. C. D. D.**

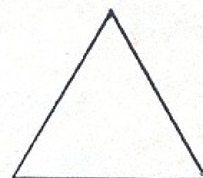
61. Carácter de las demostraciones. Se observará que este teorema (y lo mismo se aplica a cualquiera otro) es en sí mismo el enunciado de una proposición que debe demostrarse, mientras que la *demostración* que le sigue es un encadenamiento de proposiciones la verdad de las cuales se admite, sea como axioma, sea por haberse demostrado previamente.

62. Clasificación de los triángulos según los lados. Dícese que un triángulo es

escaleno cuando sus tres lados son desiguales;
isósceles cuando dos de sus lados son iguales;
equilátero cuando sus tres lados son iguales.

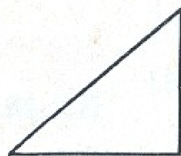

Escaleno

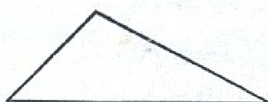

Isósceles

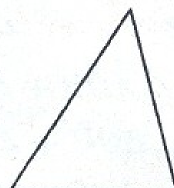

Equilátero

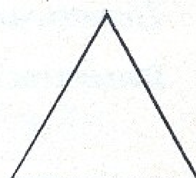
63. Clasificación de los triángulos según los ángulos. Dícese que un triángulo es

rectángulo cuando tiene un ángulo recto;
obtusángulo cuando tiene un ángulo obtuso;
acutángulo cuando sus tres ángulos son agudos;
oblicuángulo cuando no es rectángulo;
equiángulo cuando sus ángulos son iguales.


Rectángulo


Obtusángulo


Acutángulo


Equiángulo

64. Partes homólogas. Llámanse *partes homólogas* en dos figuras iguales o de una misma forma las que están semejantemente dispuestas en las dos figuras.

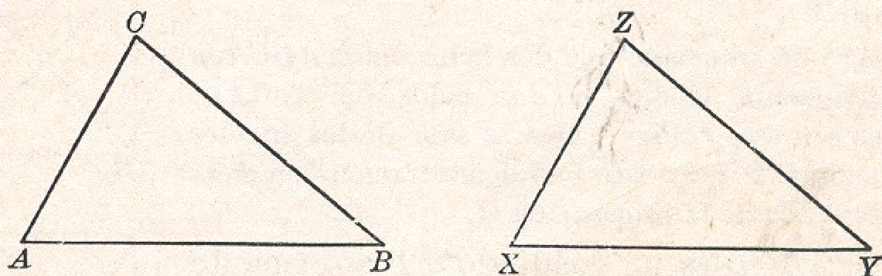
65. Cuadrado. Llámase *cuadrado* una figura rectilínea que tiene cuatro lados iguales y cuatro ángulos rectos.

66. Congruencia. Dícese que dos figuras son *congruentes* cuando pueden hacerse coincidir en todas sus partes; esto es, cuando son iguales.

67. COROLARIO. *Las partes homólogas de dos figuras congruentes son iguales.*

PROPOSICIÓN II. TEOREMA

68. *Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, los dos triángulos son iguales.*



Sean ABC, XYZ **dos triángulos en que** $AB = XY$, $AC = XZ$, y $\angle A = \angle X$.

Demostrar que $\triangle ABC = \triangle XYZ$.

Demostración. Colóquese el $\triangle ABC$ sobre el XYZ de suerte que A caiga sobre X y AB sobre XY. N.° 53, 5.°

Entonces B caerá sobre Y.

(*Se supone que* $AB = XY$.)

AC tomará la dirección de XZ.

(*Se supone* $\angle A = \angle X$.)

Finalmente, C caerá sobre Z.

(*Se supone que* $AC = XZ$.)

$\therefore$ CB coincidirá con ZY. 53, 1.°

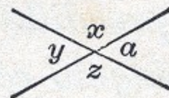
(*Por dos puntos dados cualesquiera puede hacerse pasar una recta, y sólo una.*)

$\therefore$ los dos $\triangle$ son congruentes y por tanto iguales. L.C.D.D

69. COROLARIO. *Dos triángulos rectángulos son iguales si los dos lados que forman el ángulo recto en el uno son iguales a los correspondientes del otro.*

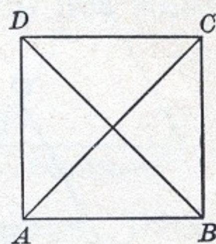
EJERCICIO 5.°

1. Suponiendo que el ángulo a de esta figura sea de 53°, hállense los valores de x, y, z.



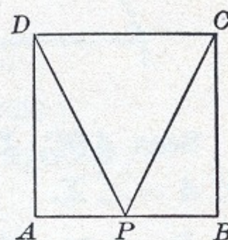
2. Si el ángulo a del ejercicio anterior es de 89°, ¿cuáles son los valores de x, y, z?

3. En el cuadrado $ABCD$, demuéstrese que $AC = BD$.



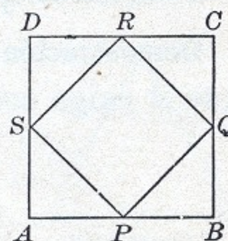
Se sabe de antemano que dos lados del $\triangle ABC$ son respectivamente iguales a dos lados del $\triangle BAD$. ¿Cuáles son esos lados? ¿Qué se sabe de los ángulos comprendidos? Escríbase una demostración completa semejante a la de la proposición II.

4. Si $ABCD$ es un cuadrado y P es el punto medio de AB, demuéstrese que $PC = PD$.



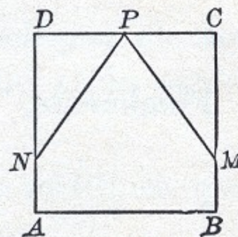
¿Qué triángulos puede demostrarse que son iguales?

5. Hállese el número de grados: 1.° de un ángulo que es la cuarta parte de su complemento; 2.° de un ángulo que es la décima parte de su complemento.



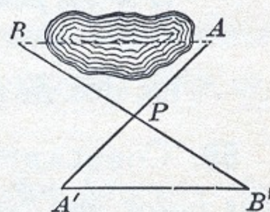
6. ¿Qué ángulo es: 1.° el doble de su suplemento? 2.° un tercio de su suplemento?

7. Los puntos P, Q, R, S son los puntos medios de los lados del cuadrado $ABCD$. Demuéstrese que $PQ = QR = RS = SP$.

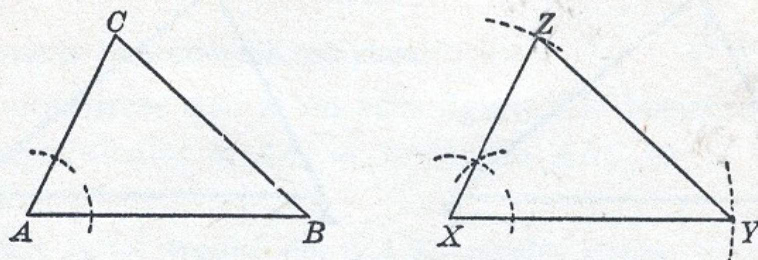


8. En el cuadrado $ABCD$, $PD = PC$ y también $AN = BM$. Demuéstrese que $PM = PN$.

9. Demuéstrese que la distancia AB de un lado a otro de una laguna puede hallarse así: En un punto conveniente P se clava una vara o un jalón. Mirando en la dirección AP, se hace clavar una estaca en A', haciendo $PA' = PA$. De igual manera se determina B', mirando de B a P, y haciendo $PB' = PB$. Después se mide la distancia $A'B'$.

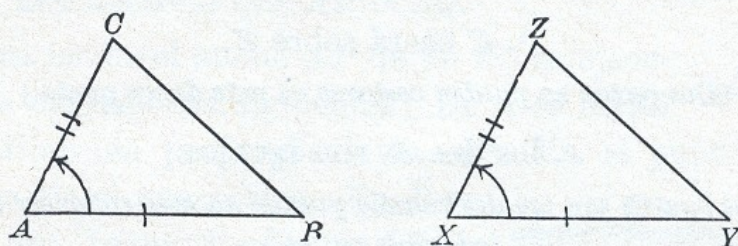


70. Dibujo de las figuras. En el n.º 31 se dieron instrucciones para dibujar las figuras geométricas más elementales, y el alumno puede aplicarlas al dibujo de las que se presentan en las varias proposiciones y ejercicios. En las dos figuras siguientes se indica la manera de construír el triángulo XYZ de modo que XY sea igual a AB, X a A, y XZ a AC. Las líneas auxiliares, o *de construcción*, se hacen de puntos.



Es bueno que al principio el alumno construya las figuras con exactitud empleando el compás y la regla, hasta que se acostumbre al uso de estos instrumentos. Después basta que las dibuje a pulso, determinando aproximadamente a ojo las condiciones que cada figura debe satisfacer. Para las demostraciones no es necesario que las figuras que se dibujen satisfagan exactamente estas condiciones: es suficiente *suponer* que las satisfacen.

71. Marcas en las partes homólogas. Las proposiciones relativas a figuras iguales se comprenden mejor, y las demostraciones se facilitan mucho, marcando con una misma marca las partes iguales en las dos figuras, como se ve a continuación:



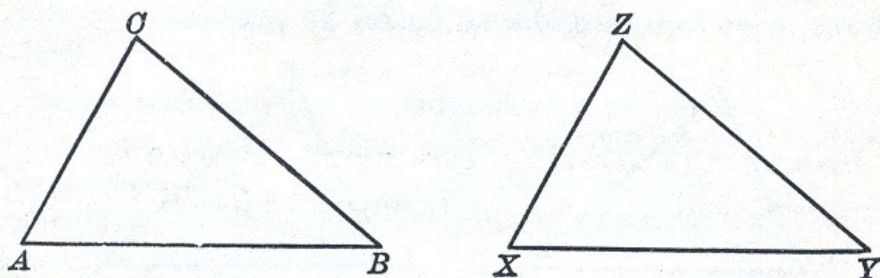
Aquí AC y su igual XZ se han marcado con dos rayitas, AB y XY con una, y los ángulos A y X con una curva. En vez de esta curva puede emplearse un punto grueso o una crucecita.

Cuando las figuras son muy complicadas, pueden facilitarse las comparaciones empleando lápices de distintos colores; pero esto rara vez merece la pena.

Proposición III. Teorema

72. *Dos triángulos son iguales si tienen iguales respectivamente un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.*

Dos ángulos son *adyacentes a un lado* cuando ese lado es común a los dos ángulos.



Sean los triángulos *ABC, XYZ,* en que los ángulos *A* y *B* son iguales respectivamente a los *X* e *Y*, y *AB* es igual a *XY*.

Demostrar que $\triangle ABC = \triangle XYZ$.

Demostración. Colóquese el $\triangle ABC$ sobre el XYZ de suerte que AB coincida con su igual XY. N.º 53, 5.º

(*Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma ni sus dimensiones.*)

Los lados AC y BC tomarán respectivamente las direcciones XZ, YZ.

(*Síguese esto de que se supone* $\angle A = \angle X$, $\angle B = \angle Y$.)

$\therefore$ C caerá sobre Z. N.º 55

(*Dos rectas no pueden cortarse en más de un punto.*)

$\therefore$ los dos $\triangle$ son iguales. N.º 16

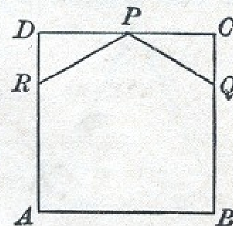
(*Dos figuras son iguales cuando pueden hacerse coincidir en todas sus partes.*)

73. Hipótesis. Llámase *hipótesis* una suposición cualquiera.

Por ejemplo, cuando en el n.º 72 se dice que $\angle A = \angle X$, y $\angle B = \angle Y$, estas igualdades existen *por hipótesis*; esto es, porque se ha supuesto en el enunciado del teorema que se trata de triángulos en que esas igualdades se verifican, y no de otros triángulos.

EJERCICIO 6.º

1. En el cuadrado $ABCD$, el punto P es el punto medio de DC, y PQ y PR se han trazado de modo que $\angle QPC = 30°$, $\angle RPQ = 120°$. Demuéstrese que $PQ = PR$.

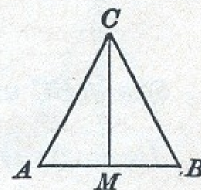


Si $\angle QPC = 30°$ y $\angle RPQ = 120°$, ¿cuál es el valor del $\angle DPR$?

¿Qué partes de los dos triángulos son iguales, y por qué?

Escríbase la demostración completa.

2. Demuéstrese que si en esta figura CM bisecta el $\angle ACB$ y es perpendicular a AB, el triángulo ABC es isósceles.



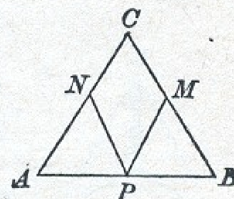
¿Son dos de los ángulos del $\triangle AMC$ iguales respectivamente a dos del $\triangle BMC$? ¿Por qué?

Los dos triángulos tienen un lado común.

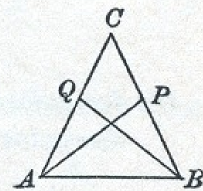
Escríbase la demostración completa.

3. En el triángulo anterior, $AC = BC$, y CM es la bisectriz del ángulo C. Demuéstrese que $AM = BM$.

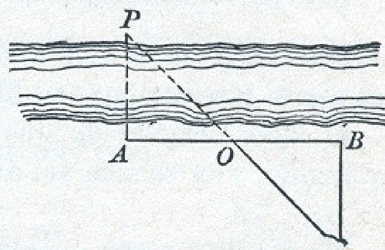
4. En el triángulo ABC, $\angle A = \angle B$. El punto P bisecta AB, y PM y PN están trazadas de modo que $\angle BPM = \angle APN$. Demuéstrese que $BM = AN$.



5. En el triángulo ABC, $\angle A = \angle B$, y $\angle BAP = \angle ABQ$. Demuéstrese que $AP = BQ$.

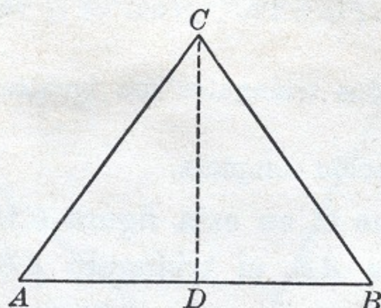


6. Para medir el ancho AP de un río se ejecutaron las operaciones siguientes: De A se midió AB en dirección perpendicular a AP. En el punto medio O de AB se clavó una estaca. En B se levantó una perpendicular a AB, y en ella se clavó una estaca en C, escogiendo este punto de suerte que quedase en línea recta con O y P. El ancho del río se determinó midiendo BC. Demuéstrese la validez del procedimiento.



Proposición IV. Teorema

74. *En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.*



Sea ABC un triángulo isósceles en que AC es igual a BC.

Demostrar que $\angle A = \angle B$.

Demostración. Trácese la bisectriz CD del $\angle ACB$. En los triángulos ADC, BDC,

$AC = BC$, Por hipót.

$CD = CD$, Identidad

$\angle ACD = \angle DCB$.

(Por construcción, CD bisecta el $\angle ACB$.)

$\therefore \triangle ADC = \triangle BDC$. N.º 68

(Si dos lados de un $\triangle$ y el $\angle$ comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el $\angle$ comprendido de otro $\triangle$, los dos $\triangle$ son iguales.)

$\therefore \angle A = \angle B$. N.º 67

(Las partes homólogas de dos figuras congruentes son iguales.) L. C. D. D.

Este teorema se conoce con el nombre de *pons asinorum*, o *puente de los asnos*, y se atribuye al filósofo griego Tales.

El lado desigual de un triángulo isósceles se llama a veces *base* del triángulo, y el vértice del ángulo opuesto, *vértice del triángulo*.

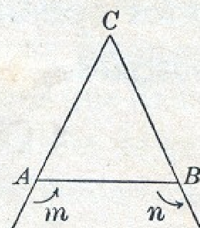
75. Corolario. *Todo triángulo equilátero es equiángulo.*

¿El triángulo equilátero es isósceles?

EJERCICIO 7.°

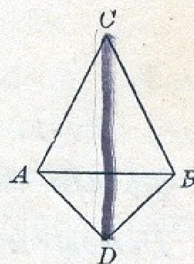
1. Supóngase que, en la figura del n.° 74, $AC = BC$ y que CD es la bisectriz del ángulo C. Demuéstrese que CD es $\perp$ a AB.

¿Qué ángulos debe demostrarse que son rectos? ¿Qué es ángulo recto? ¿Llenan estos ángulos las condiciones de la definición?



2. Suponiendo $AC = BC$, demuéstrese que los ángulos m y n son iguales.

3. Suponiendo $AC = BC$ y $AD = BD$, demuéstrese que $\angle CBD = \angle DAC$.

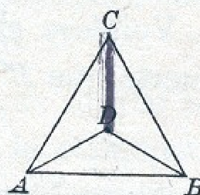


¿Qué ángulos son iguales, según la proposición IV? ¿Qué axioma se aplica aquí?

4. Demuéstrese que si en la misma figura se traza la recta CD, $\triangle DBC = \triangle DAC$.

5. Dos triángulos isósceles ABC, ABD se construyen de un mismo lado de la base común AB. Demuéstrese que $\angle CBD = \angle DAC$.

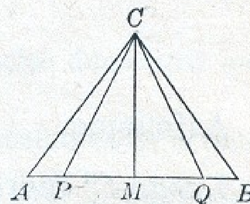
6. En la figura del ejercicio 5 demuéstrese que la recta que une los puntos C y D es la bisectriz del ángulo ADB.



¿Cuáles son los dos triángulos cuya igualdad debe demostrarse?

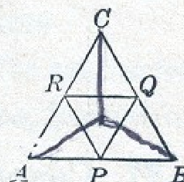
7. En esta figura, $AC = BC$ y $AP = BQ$. Demuéstrese que $PC = QC$, y $\angle MPC = \angle MQC$.

8. Demuéstrese que si en esta figura $AC = BC$, $AP = BQ$, y $PM = QM$, la recta CM es $\perp$ a PQ.



¿Qué ángulos debe demostrarse que son rectos?

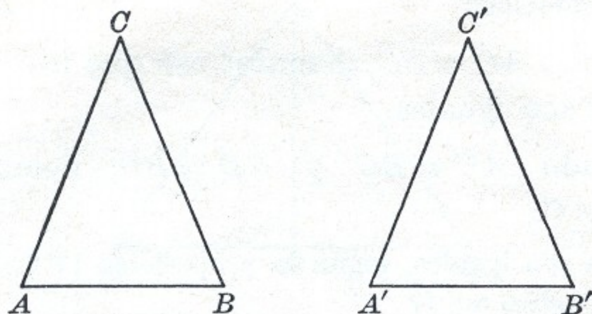
9. En esta figura, P, Q, R son los puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC. Demuéstrese que el triángulo PQR es equilátero.



Demuéstrese, aplicando teoremas ya demostrados, que los $\triangle$ APR, BQP, CRQ son iguales.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA

76. *Si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos son iguales, y el triángulo es por tanto isósceles.*



Sea ABC un triángulo en que los ángulos A y B son iguales.

Demostrar que $AC = BC$.

Demostración. Supóngase que el triángulo $A'B'C'$ es el triángulo ABC trasportado a otra posicion.

Voltéese el triángulo $A'B'C'$ y colóquese sobre el ABC de suerte que B' caiga en A y A' en B.

El lado $B'A'$ coincidirá con AB. N.° 53, 1.°

Ahora bien, $\angle A' = \angle B'$, Por hipót.

$\angle A = \angle A'$; Por hipót.

$\therefore \angle A = \angle B'$. N.° 52, 7.°

$\therefore B'C'$ tomará la dirección de AC.

Asímismo, $A'C'$ tomará la dirección de BC.

Luego C' caerá a la vez en AC y BC, y por tanto en C.

$\therefore B'C' = AC$.

Pero $B'C'$ es lo mismo que BC.

$\therefore BC = AC$. L.C.D.D.

77. CORORARIO. *Todo triángulo equiángulo es equilátero.*

78. Métodos de demostración. Se observará que en los teoremas precedentes se han empleado dos métodos de demostración, a saber:

1) *Método sintético.* La demostración de la proposición I es ejemplo de este método, que consiste en encadenar axiomas, postulados y teoremas ya demostrados de tal manera que dicho encadenamiento conduzca necesariamente a la conclusión de que la proposición que se trata de demostrar debe ser verdadera; pues de otro modo no lo serían las proposiciones de que tal conclusión se deduce. Éste es el método empleado en los ejercicios de las páginas 28, 31 y 33.

2) *Método de superposición.* Consiste este método en colocar una figura sobre otra y demostrar por el razonamiento que, dadas las condiciones supuestas, así como la verdad de ciertas proposiciones previamente establecidas, las dos figuras deben coincidir en todas sus partes y ser por tanto iguales. Ejemplos de este método ocurren en las proposiciones II y III. En la V se hizo uso de un método especial, que consiste en superponer una figura a sí misma, después de haberla volteado.

79. Recíproca. Si dos proposiciones son tales que lo que se supone en la una es lo que debe demostrarse en la otra, cada una de ellas se llama *proposición recíproca*, o brevemente *recíproca*, de la otra.

En la proposición IV se supone $AC = BC$, y es preciso demostrar que $\angle A = \angle B$.

En la proposición V se supone $\angle A = \angle B$, y es preciso demostrar que $AC = BC$.

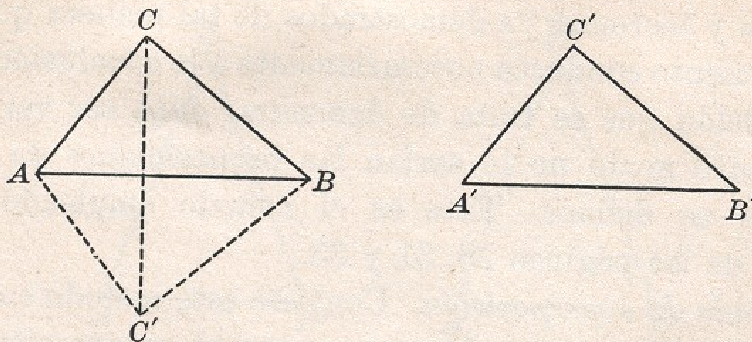
Así pues, las proposiciones IV y V son cada una la recíproca de la otra.

Obsérvese muy especialmente que *de que una proposición sea verdadera no se sigue necesariamente que su recíproca lo es.* En ciertos casos lo es, mas el hecho debe demostrarse

Así, la recíproca de la proposición: *Si dos ángulos son rectos, son iguales,* es: *Si dos ángulos son iguales, son rectos,* lo cual no es necesariamente cierto.

Proposición VI. Teorema

80. *Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, los dos triángulos son iguales.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos en que AB es igual a $A'B'$, BC a $B'C'$, y CA a $C'A'$.

Demostrar que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Demostración. Sean AB y $A'B'$ los lados mayores de los dos triángulos.

Voltéese el triángulo $A'B'C'$ y colóquese de modo que $A'B'$ coincida con su igual AB.

El vértice C' caerá abajo del lado AB, como se ve, y por tanto el $\triangle A'B'C'$ quedará en la posición ABC'.

Trácese CC'.

Ahora bien, $AC = AC'$, $BC = BC'$; Por hipót.

$\therefore \angle ACC' = \angle CC'A$, y $\angle C'CB = \angle BC'C$. N.° 74

$\therefore \angle ACC' + \angle C'CB = \angle CC'A + \angle BC'C$, N.° 52, 1.°

o lo que es lo mismo,

$\angle ACB = \angle BC'A$. N.° 52, 8.°

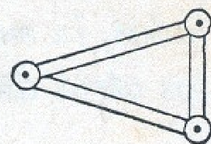
$\therefore \triangle ABC = \triangle ABC'$. N.° 68

$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

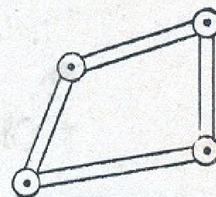
(El $\triangle A'B'C'$ es el ABC' en otra posición.) L. C. D. D.

EJERCICIO 8.º

1. Demuéstrese que la línea que une el vértice y el punto medio de la base de un triángulo isósceles divide el triángulo en dos triángulos iguales.

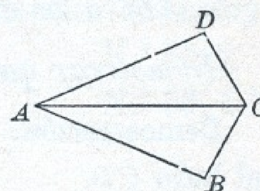


2. Tres varillas de hierro están engoznadas por los extremos, como se ve en esta figura. ¿Forman una figura rígida (que no puede cambiar de forma)? ¿Por qué?

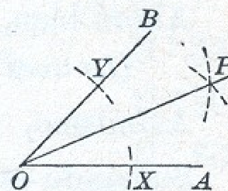


3. ¿Forman una figura rígida las cuatro varillas engoznadas que aquí se representan? Si no, ¿cómo puede hacerse rígida agregando otra varilla? Explíquese por qué.

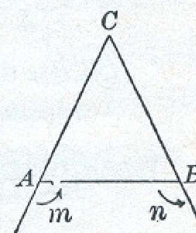
4. Si en los lados opuestos de una misma base se construyen dos triángulos isósceles, demuéstrese por la proposición VI y el n.º 67 que la recta que une los vértices de los ángulos opuestos a la base es la bisectriz de esos ángulos.



5. En esta figura, $AB = AD$, $CB = CD$. Demuéstrese que AC es la bisectriz de los ∡s BAD y DCB.

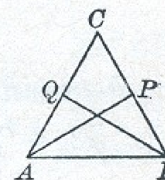


6. En el ejercicio 8.º del n.º 31 se enseñó la manera de bisectar un ángulo, empleando esta figura. Trácense PX y PY, y demuéstrese por la proposición VI que PO es la bisectriz del $\angle AOB$.



7. En un triángulo ABC, $AC = BC$. Si las bisectrices de los ángulos A y B se cortan en P, demuéstrese que el $\triangle ABP$ es isósceles.

8. Demuéstrese que $AC = BC$ si $\angle m = \angle n$.

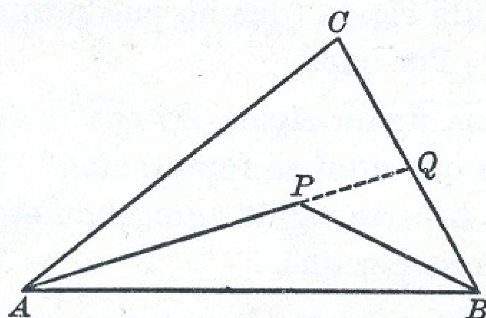


9. De los vértices A y B de un triángulo equilátero se trazan rectas a los puntos medios de los lados opuestos. Demuéstrese que son iguales.

Demuéstrese por la proposición II que $\triangle ABQ = \triangle BAP$.

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

81. *Si de un punto situado en el interior de un triángulo se trazan rectas a los extremos de uno de los lados, la suma de estas rectas es menor que la suma de los otros dos lados del triángulo.*



Sean PA y PB dos rectas trazadas del punto interior P del triángulo ABC a los extremos del lado AB.

Demostrar que $CA + CB > PA + PB.$

Demostración. Prolónguese AP hasta su intersección Q con el lado CB. N.° 53, 2.°

Ahora bien, $CA + CQ > PA + PQ.$ N.° 53, 3.°

(*La línea más corta entre dos puntos es la recta que los une.*)

Asímismo, $BQ + PQ > PB.$ N.° 53, 3.°

Sumando estas desigualdades miembro a miembro, resulta

$$CA + CQ + BQ + PQ > PA + PQ + PB. \qquad \text{N.° 52, 5.°}$$

(*Si dos desigualdades de un mismo sentido se suman miembro a miembro, los resultados son desiguales en el mismo sentido.*)

Reemplazando $CQ + BQ$ por su igual CB:

$$CA + CB + PQ > PA + PQ + PB. \qquad \text{N.° 52, 8.°}$$

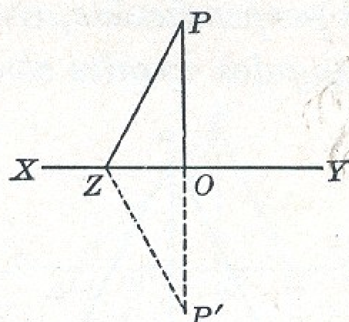
(*Toda cantidad puede reemplazarse con su igual.*)

Restando PQ de los dos miembros de la desigualdad (n.° 52, 4.°), resulta

$$CA + CB > PA + PB. \qquad \text{L.C.D.D}$$

Proposición VIII. Teorema

82. *De un punto exterior a una recta no puede bajarse a esa recta más de una perpendicular.*



Sean P un punto exterior a la recta XY; PO una perpendicular bajada de P a XY, y PZ otra recta cualquiera trazada de P a XY.

Demostrar que PZ *no es* $\perp$ *a* XY.

Demostración. Prolónguese PO hasta P', haciendo OP' igual la perpendicular OP. N.° 53, 2.°

Trácese $P'Z$. N.° 53, 1.°

Por construcción, POP' es una recta.

$\therefore PZP'$ no es una recta. N.°53, 1.°

$\therefore$ el $\angle P'ZP$ no es de lados colineales. N.° 33

Ahora bien, $\angle POZ$ y $\angle ZOP'$ son rectos. N.° 27

$\therefore \angle POZ = \angle ZOP'$. N.° 56

Además, $PO = OP'$, Por construcción

$OZ = OZ$. Identidad

$\therefore \triangle OPZ = \triangle OP'Z$. N.° 68

(*Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, los dos triángulos son iguales.*)

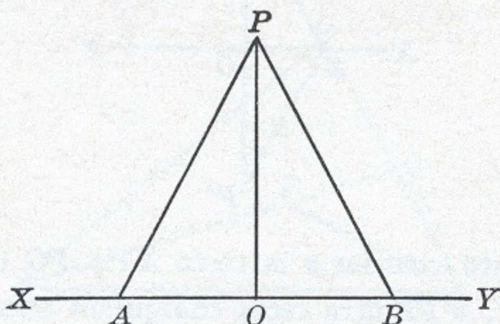
Y también $\angle OZP = \angle OZP'$. N.° 67

$\therefore \angle OZP$, mitad del $\angle P'ZP$, no es recto. N.° 34

$\therefore PZ$ no es $\perp$ a XY (n.° 27). **L.C.D.D**

Proposición IX. Teorema

83. *Si de un punto de una perpendicular a una recta se trazan a la recta dos oblicuas cuyos pies estén a igual distancia del pie de la perpendicular, esas dos oblicuas son iguales y forman ángulos iguales con la perpendicular*



Sea *PO* una perpendicular a *XY*, y sean *PA* y *PB* dos oblicuas trazadas de *P* a *XY* de tal suerte que *OA* sea igual a *OB*.

Demostrar que $PA = PB$ *y que* $\angle APO = \angle BPO$.

Demostración. En los $\triangle s$ AOP, BOP,

$\angle POA$ y $\angle BOP$ son rectos.

(*Se supone que* PO *es* $\perp$ *a* XY.)

$\therefore \angle POA = \angle POB$. N.º 56

(*Todos los* $\angle s$ *rectos son iguales.*)

También se tiene: $OA = OB$, Por hipót.

$PO = PO$. Identidad

(*En otros términos,* PO *es común a los dos* $\triangle s$.)

$\therefore \triangle AOP = \triangle BOP$. N.º 68

(*Si dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ángulo comprendido de otro triángulo, los dos triángulos son iguales.*)

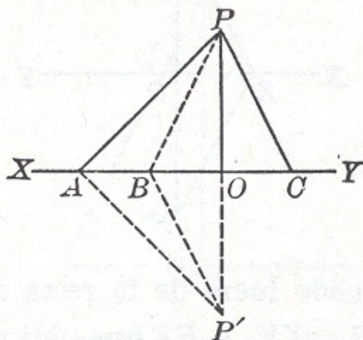
$\therefore PA = PB$,

y también $\angle APO = \angle BPO$. N.º 67

(*Las partes homólogas de figuras iguales son iguales.*) **L. C. D. D.**

PROPOSICIÓN X. TEOREMA

84. *Si de un punto de una perpendicular a una recta se trazan a esa recta dos oblicuas cuyos pies no equidisten del de la perpendicular, la oblicua cuyo pie dista más es mayor que la otra.*



Sean PO una perpendicular a XY, y PA, PC dos oblicuas. Se supone que OA es mayor que OC.

Demostrar que $PA > PC$.

Demostración. Tómese OB igual a OC, y trácese PB.

Entonces, $PB = PC$. N.º 83

En PO prolongada tómese $OP' = OP$, y trácense $P'A$, $P'B$.

Entonces, $PA = P'A$, y $PB = P'B$. N.º 83

Ahora bien, $PA + P'A > PB + P'B$. N.º 81

$\therefore$ $2\,PA > 2\,PB$, y $PA > PB$. N.º 52, 8.º y 4.º

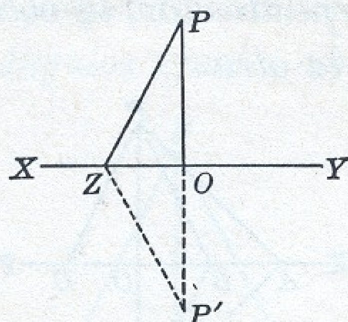
$\therefore$ $PA > PC$ (n.º 52, 8.º). L. C. D. D

85. COROLARIOS. *De un punto situado fuera de una recta, sólo dos oblicuas de longitud dada pueden trazarse a esa recta, y estas oblicuas interceptan en la recta segmentos iguales de los dos lados de la perpendicular bajada del mismo punto.*

Si se trazan dos oblicuas de un mismo punto a una recta, el pie de la mayor dista más del pie de la perpendicular que el pie de la menor.

Proposición XI. Teorema

86. *La perpendicular es la más corta de las rectas que pueden trazarse a una recta de un punto situado fuera de ella.*



Sea P un punto situado fuera de la recta XY. Sean PO la perpendicular bajada de P a XY, y PZ una oblicua cualquiera.

Demostrar que $PO < PZ$.

Demostración. Prolónguese PO hasta P' de suerte que OP' sea igual a PO, y trácese $P'Z$.

Entonces se tendrá: $PZ = P'Z$. N.º 83

$\therefore PZ + P'Z = 2\,PZ$. N.º 52, 8.º

Igualmente, $PO + P'O = 2\,PO$. N.º 52, 8.º

Ahora bien, $PO + P'O < PZ + P'Z$. N.º 53, 4.º

$\therefore 2\,PO < 2\,PZ$. N.º 52, 8.º

$\therefore PO < PZ$ (n.º 52, 5.º). L.C.D.D.

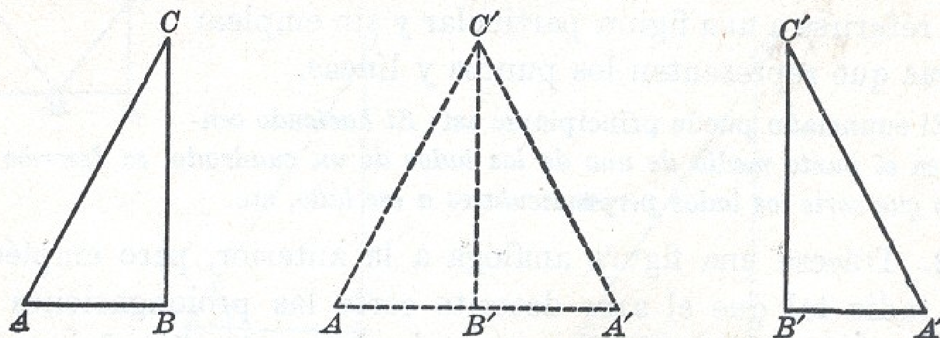
87. Hipotenusa y catetos. Llámase *hipotenusa* de un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto. Los otros dos lados se llaman *catetos*.

88. Distancia. Llámase *distancia* entre dos puntos la longitud de la recta que los une.

Llámase *distancia de un punto a una recta* la longitud de la perpendicular trazada del punto a la recta.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA

89. *Dos triángulos rectángulos son iguales si la hipotenusa y un cateto del uno son respectivamente iguales a la hipotenusa y un cateto del otro.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos rectángulos tales que la hipotenusa AC es igual a la $A'C'$, y el cateto BC al $B'C'$.

Demostrar que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Demostración. Colóquese el $\triangle ABC$ al lado del $A'B'C'$ de suerte que BC caiga sobre $B'C'$ y A y A' queden en lados opuestos de $B'C'$.

Entonces BA caerá sobre la prolongación de $A'B'$. N.° 43

(Síguese esto de que $\angle CBA + \angle A'B'C' = 2\,rt.$)

Se tiene además:

$$AC' = A'C'.$$

(Síguese esto de que AC' es el lado AC en otra posición, y se supone que los lados AC y $A'C'$ son iguales.)

$$\therefore AB' = A'B'.$$ N.° 85

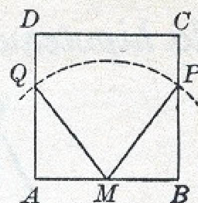
$$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'.$$ N.° 80

(Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, los dos triángulos son iguales.) L.C.D.D

90. COROLARIO. *Dos triángulos rectángulos son iguales si dos lados cualesquiera del uno son iguales a los correspondientes dos lados del otro.*

EJERCICIO 9.º

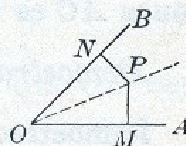
1. $ABCD$ es un cuadrado, y M el punto medio de AB. Haciendo centro en M se describe un arco que corta a AD en Q y a BC en P. Demuéstrese que $\triangle MBP = \triangle MAQ$. Escríbase el enunciado general de este teorema sin referirse a una figura particular y sin emplear letras que representen los puntos y líneas.



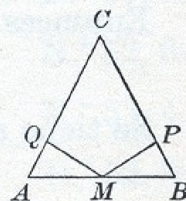
El enunciado puede principiarse así: *Si haciendo centro en el punto medio de uno de los lados de un cuadrado, se describe un arco que corte los lados perpendiculares a ese lado*, etc.

2. Trácese una figura análoga a la anterior, pero empléese un radio tal que el arco descrito corte las prolongaciones de AD y BC en los puntos Q y P, respectivamente, situados arriba de DC. Demuéstrese que $\triangle MBP = \triangle MAQ$.

3. Demuéstrese que si las perpendiculares PN, PM a los lados del ángulo AOB son iguales, el punto P está en la bisectriz del ángulo. Escríbase el enunciado general de este teorema.

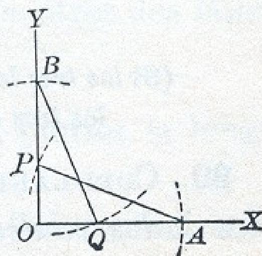


4. Demuéstrese que si las perpendiculares trazadas del punto medio M de uno de los lados AB de un triángulo ABC a los otros dos lados son iguales, los ángulos A y B también lo son. ¿Qué se sigue de aquí en cuanto a los lados AC y BC? Escríbase el enunciado general de este teorema.



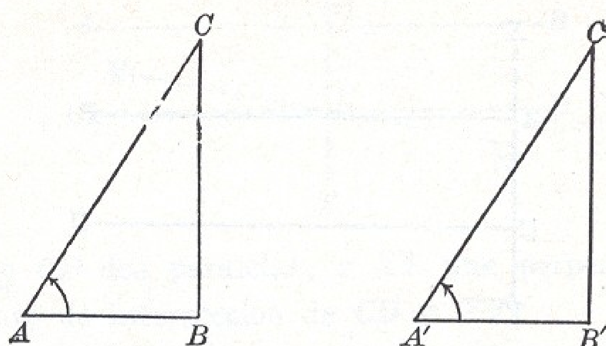
5. Demuéstrese que si las perpendiculares trazadas de los extremos de un lado de un triángulo a los otros dos lados son iguales, el triángulo es isósceles.

6. Supóngase $OY \perp$ a OX. Con centro O se traza un arco que corta a OX en A y a OY en B; con centro A, un arco que corta a OY en P; y con centro B, y el mismo radio, un arco que corta a OX en Q. Demuéstrese que $OP = OQ$.



PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

91. *Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales respectivamente la hipotenusa y uno de los ángulos adyacentes a ella.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en que las hipotenusas AC y $A'C'$ son iguales, y el ángulo A es igual al A'.

Demostrar que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Demostración. Colóquese el triángulo ABC sobre el $A'B'C'$ de suerte que el vértice A coincida con el vértice A' y AC tome la dirección de $A'C'$

Entonces C caerá sobre C'.

(Síguese esto de que se supone que $AC = A'C'$.)

AB tomará la dirección $A'B'$.

(Síguese esto de que se supone que $\angle A = \angle A'$.)

Puesto que C coincide con C'

y los $\measuredangle s$ B y B' son rectos,

CB coincidirá con $C'B'$. N.° 82

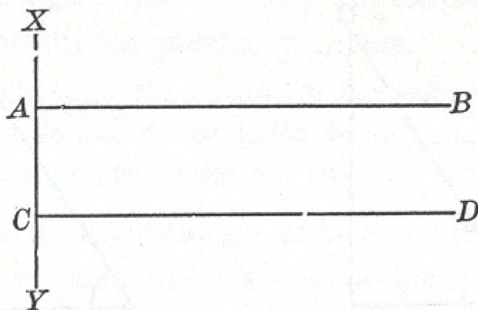
(De un punto exterior a una recta no puede bajarse a esa recta más de una perpendicular.)

$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'$. N.° 16

(Dos figuras cualesquiera son iguales cuando pueden hacerse coincidir en todos sus puntos.) **L. C. D. D**

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA

92. *Dos rectas situadas en un mismo plano y perpendiculares a una tercera no pueden encontrarse, por más que se prolonguen.*



Sean *AB* y *CD* dos rectas perpendiculares a otra recta *XY*.

Demostrar que AB y CD no pueden encontrarse por más que se prolonguen.

Demostración. Si AB y CD prolongadas pudieran encontrarse en un punto, se tendrían dos perpendiculares bajadas de un mismo punto a una recta, lo cual es imposible (n.° 82).

∴ AB y CD prolongadas no pueden encontrarse. L.C.D.D.

93. Rectas paralelas. Llámanse *rectas paralelas* las que se hallan en un mismo plano y no se encuentran por más que se prolonguen.

94. Postulado de las paralelas. *Por un punto cualquiera puede trazarse una paralela a una recta dada, y sólo una.*

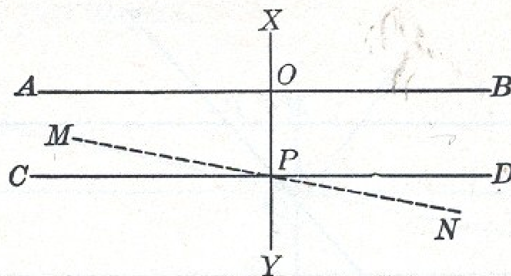
95. COROLARIO 1.° *Dos rectas situadas en un mismo plano y perpendiculares a una tercera son paralelas.*

96. COROLARIO 2.° *Dos rectas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.*

Pues si se encontraran, serían dos paralelas a una recta trazadas por un mismo punto, lo cual es contrario al postulado del n.° 94.

PROPOSICIÓN XV. TEOREMA

97. *Si dos o más rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a las otras.*



Sean AB y CD dos paralelas, y XY una perpendicular a AB Sea P el punto de intersección de CD y XY.

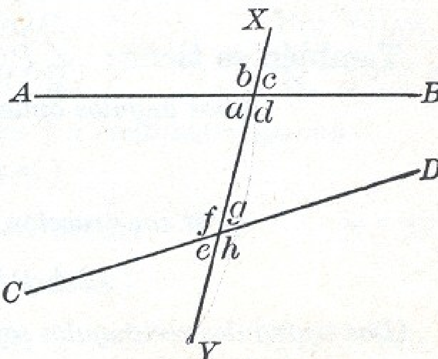
Demostrar que XY *es* $\perp$ *a* CD.

Demostración. Supóngase que por el punto P se traza MN perpendicular a XY.

	MN debe ser $\parallel$ a AB.	N.º 95
Pero	CD es $\parallel$ a AB.	Por hipót.
	$\therefore$ CD y MN deben coincidir.	N.º 94
Ahora bien,	XY es $\perp$ a MN.	Por hipót
	$\therefore$ XY es $\perp$ a CD.	L. C. D. D

98. Trasversal o secante. Llámase *trasversal* o *secante* de dos o más rectas toda recta que las corta.

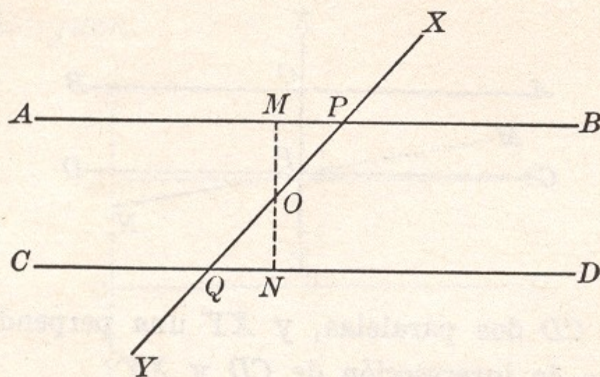
99. Ángulos formados por una trasversal. Si XY corta AB y CD, los ángulos a, d, f, g se llaman ángulos *internos*; los b, c, h, e, ángulos *externos*.



Tomados en pares, d y f, a y g se llaman ángulos *alternos-internos*; b y h, c y e, *alternos-externos*; b y f, c y g, e y a, h y d, *correspondientes*.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA

100. *Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos alternos-internos son iguales.*



Sean AB y CD dos paralelas cortadas por la trasversal XY en los puntos P y Q respectivamente.

Demostrar que $\angle APQ = \angle DQP$.

Demostración. Por O, punto medio de PQ, trácese la recta MN perpendicular a CD.

MN es $\perp$ a AB. N.º 97

(*Si dos o más rectas son paralelas, toda perpendicular a una de ellas es perpendicular a las otras.*)

Ahora bien, los $\triangle PMO$ y QNO son rectángulos. N.º 63

(*Por construcción, los* $\angle OMP$ *y* ONQ *son rectos.*)

También se tiene: $\angle POM = \angle QON$, N.º 60

(*Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.*)

$OP = OQ$. Por hipót.

(*Por construcción, O es el punto medio de* PQ.)

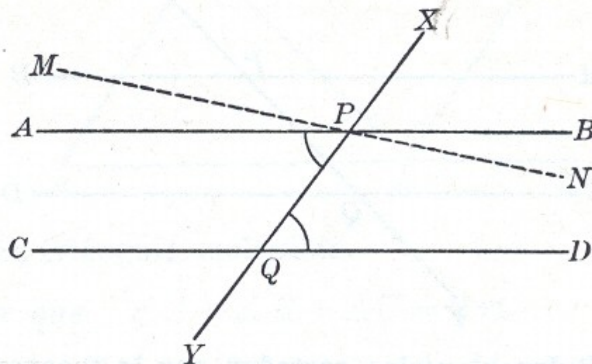
$\therefore \triangle PMO = \triangle QNO$. N.º 91

(*Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales respectivamente la hipotenusa y uno de los ángulos adyacentes a ella.*)

$\therefore \angle APQ = \angle DQP$. L. C. D. D.

PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA

101. *Si dos rectas situadas en un mismo plano forman con una trasversal ángulos alternos-internos iguales, esas dos rectas son paralelas.*



Sea XY una trasversal que forma con las rectas AB y CD los ángulos alternos-internos iguales APQ, DQP.

Demostrar que AB *es* ‖ *a* CD.

Demostración. Puesto que no se sabe aún si AB es ‖ a CD, supongamos que MN es la recta que pasa por P y es ‖ a CD.

Demostraremos ahora que AB coincide con MN.

En primer lugar, $\angle MPQ = \angle DQP$. N.º 100

(*Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos alternos-internos son iguales.*)

Ahora bien, $\angle APQ = \angle DQP$. Por hipót.

$\therefore \angle APQ = \angle MPQ$. N.º 52, 7.º

(*Dos cantidades iguales a una tercera o a cantidades iguales son iguales entre sí.*)

$\therefore AB$ y MN deben coincidir. N.º 23

(*Definición de ángulos iguales.*)

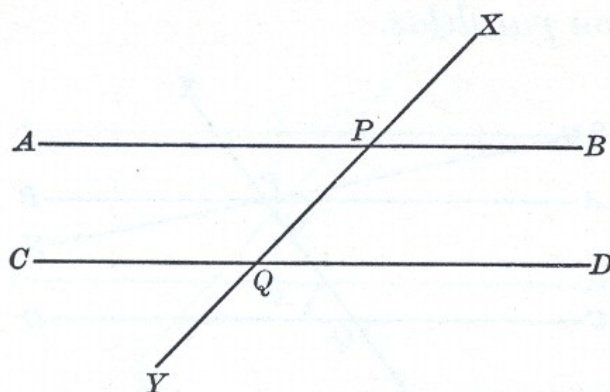
Sabemos que MN es ‖ a CD. Por hipót.

$\therefore AB$, que coincide con MN, es ‖ a CD. L.C.D.D

Esta proposición es la recíproca de la prop. XVI. Véase el n.º 79.

Proposición XVIII. Teorema

102. *Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos correspondientes son iguales.*



Seen *AB, CD* dos paralelas cortadas por la trasversal *XY* en los puntos *P* y *Q* respectivamente.

Demostrar que $\angle BPX = \angle DQX$.

Demostración. $\angle BPX = \angle APQ$, N.º 60

y también, $\angle APQ = \angle DQX$. N.º 100

$\therefore \angle BPX = \angle DQX$ (n.º 52, 7.º). L. C. D. D.

103. Corolario 1.º *Si dos rectas situadas en un plano forman con una trasversal ángulos correspondientes iguales, esas dos rectas son paralelas.* Véase el n.º 101.

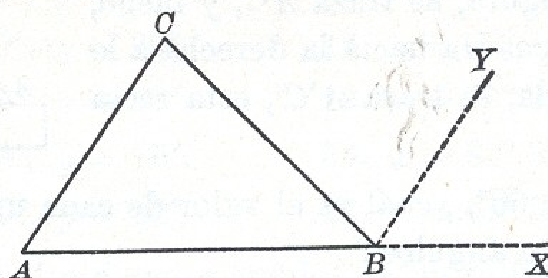
104. Corolario 2.º *Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos externos situados de un mismo lado de la trasversal, así como los internos, son suplementarios.*

105. Corolario 3.º *Si una trasversal corta dos rectas de tal modo que los ángulos externos y por tanto los internos de un mismo lado de la trasversal son suplementarios, las rectas son paralelas.*

106. Corolario 4.º *Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos alternos-externos son iguales.*

PROPOSICIÓN XIX. TEOREMA

107. *La suma de los tres ángulos de un triángulo es igual a dos rectos.*



Sea ABC un triángulo cualquiera.

Demostrar que $\angle A + \angle B + \angle C = 2\ rt.$

Demostración. Trácese $BY \parallel AC$, y prolónguese AB hasta X.

$\angle XBY + \angle YBC + \angle CBA = 2$ rt. N.° 34

También, $\angle A = \angle XBY$, N.° 102

y además, $\angle C = \angle YBC$. N.° 100

$\therefore \angle A + \angle B + \angle C = 2$ rt. L. C. D. D.

108. COROLARIO 1.° *Si dos ángulos de un triángulo son respectivamente iguales a dos ángulos de otro, el tercer ángulo del uno es igual al tercer ángulo del otro.*

109. COROLARIO 2.° *Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de uno obtuso.*

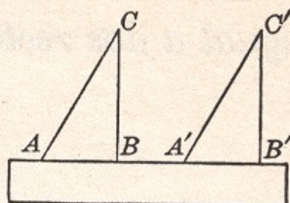
110. Ángulo externo. Llámase *ángulo externo* de un triángulo el formado por un lado y la prolongación de otro.

En la figura del n.° 107, el ángulo XBC es uno de los ángulos externos del triángulo ABC. Con respecto a XBC, los ángulos A y C se llaman *ángulos internos opuestos.*

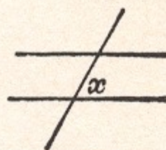
111. COROLARIO 3.° *Todo ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los internos opuestos, y por tanto mayor que cada uno de los dos.*

EJERCICIO 10.°

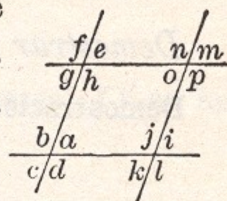
1. Demuéstrese que si, colocando un cartabón o escuadra contra el borde de una regla plana, como se ve en esta figura, se traza AC, y luégo, moviendo la escuadra hacia la derecha a lo largo de la regla, se traza $A'C'$, esta recta es $\parallel$ a AC.



2. Si $\angle x = 60°$, ¿cuál es el valor de cada uno de los otros siete ángulos?

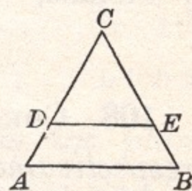


3. Dos paralelas son cortadas por dos trasversales, paralelas también. Tómese cada uno de los ángulos e indíquese a qué otros ángulos es igual, escribiendo, por ejemplo, $a = c = g = e \ldots$ Dénse las razones de estas igualdades.

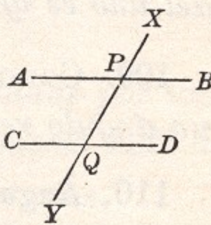


4. En la misma figura, indíquese en forma de ecuaciones qué ángulos son suplementarios; así: $a + h = 180°$.

5. En el triángulo ABC, $AC = BC$, y DE es paralela a AB. Demuéstrese que $CD = CE$. Escríbase el enunciado general de este teorema.



6. En la figura que sigue a la anterior, AB es paralela a CD, y $\angle APQ = \frac{1}{2} \angle QPB$. ¿Cuál es el valor en grados de cada uno de los ángulos?

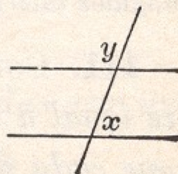


7. Si $\angle DQY = 135°$, ¿cuál es el valor de cada uno de los otros ángulos?

8. Supóngase $\angle DQP = x$ y $\angle DQY = y$. ¿Cuáles son los valores de x e y, si $y - x = 100°$?

9. Dados $\angle CQY = x$, $\angle APX = y$, $x = \frac{1}{5} y$, calcúlense x e y.

10. En la próxima figura, $x = 72°$, $x = \frac{2}{3} y$. Dígase si las rectas son paralelas.



11. Supóngase que en la misma figura $x = 73°$ e $y - x = 32°$ Dígase si las rectas son paralelas.

Los tres ángulos de un triángulo son x, y, z. *Calcúlese el valor de* z *correspondiente a cada uno de los siguientes pares de valores de* x *e* y*:*

12. $x = 10°$, $y = 30°$.
13. $x = 20°$, $y = 20°$.
14. $x = 75°$, $y = 50°$.
15. $x = 38°$, $y = 76°$.
16. $x = 49°$, $y = 92°$.
17. $x = 37°$, $y = 48°$.
18. $x = 63°$, $y = 29°$.
19. $x = 75° 29'$, $y = 68° 41'$.
20. $x = 82° 33'$, $y = 75° 48'$.
21. $x = 69° 58'$, $y = 82° 49'$.

22. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 37°, ¿cuál es el valor del otro?

23. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 36° 41′, ¿cuál es el valor del otro?

24. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 29° 48′ 56″, ¿cuál es el valor del otro?

25. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es dos tercios del otro, ¿cuáles son los valores de esos ángulos, en grados?

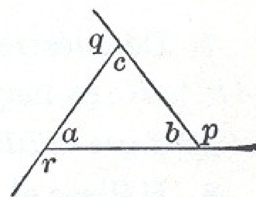
26. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es dos veces el otro, ¿cuáles son los valores de esos ángulos?

27. Si los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son $2x$ y $5x$, determínense los valores de x y de los dos ángulos.

28. Uno de los ángulos de un triángulo es el doble de otro y el triplo del tercero. Hállense los tres ángulos.

29. Si uno de los ángulos de un triángulo isósceles es el doble de otro, ¿cuáles son los valores de los tres ángulos?

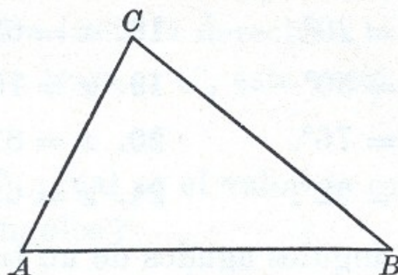
30. ¿Cuál de los ángulos de esta figura es igual a $a + c$? ¿Cuáles son los dos ángulos cuya suma es igual a q? ¿Cuál es el valor en grados de la suma $p + q + r$?



31. Demuéstrese la prop. XIX trazando por el vertice C una paralela al lado AB, en vez de trazar BY.

PROPOSICIÓN XX. TEOREMA

112. *La suma de dos lados cualesquiera de un triángulo es mayor que el tercer lado; y la diferencia, menor.*



Sea *AB* el lado mayor del triángulo *ABC*.

Demostrar que $BC + CA > AB$, *y* $AB - BC < CA$.

Demostración. $BC + CA > AB$. N.º 53, 3.º

(*El camino más corto entre dos puntos es la recta que los une.*)

De la desigualdad $BC + CA > AB$

se deduce $CA > AB - BC$. Nº. 52, 4.º

$\therefore\ AB - BC < CA$. L. C. D. D.

EJERCICIO 11

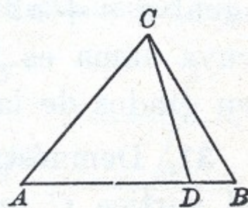
Dígase en qué casos se pueden formar triángulos con las varillas dadas en cada uno de los casos siguientes, en que los números expresan las longitudes de las varillas (en centímetros, por ejemplo):

1. 2, 3, 4. **3.** 6, 7, 9. **5.** 8, 9,5, 18.

2. 3, 4, 7. **4.** 7, 10, 20. **6.** 9,75, 10,5, 12,25

7. Demuéstrese que en esta figura la suma $AB + BC$ es mayor que $AD + DC$.

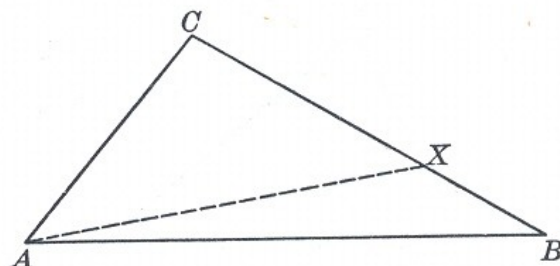
¿Por qué es $DB + BC > DC$?



8. Hállese el número de grados de cada uno de los ángulos de un triángulo equilátero.

PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA

113. *Si dos lados de un triángulo son desiguales, al mayor lado se opone mayor ángulo.*



Sea ABC un triángulo en que BC es mayor que CA.

Demostrar que $\angle BAC > \angle B$.

Demostración. Hágase CX igual a CA.

Trácese AX.

El $\triangle ACX$ es isósceles; N.º 62

$\therefore \angle CXA = \angle XAC$. N.º 74

(*En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.*)

Ahora bien, $\angle CXA > \angle B$. N.º 111

(*Todo ángulo externo de un triángulo es mayor que cualquiera de los internos opuestos.*)

También se tiene: $\angle BAC > \angle XAC$. N.º 52, 10.º

(*El $\angle XAC$ es evidentemente parte del BAC.*)

Reemplazando en esta desigualdad $\angle XAC$ por su igual $\angle CXA$, resulta $\angle BAC > \angle CXA$.

Puesto que $\angle BAC > \angle CXA$

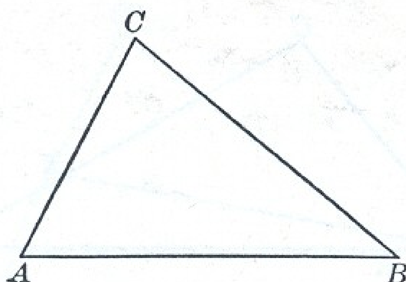
y también $\angle CXA > \angle B$,

síguese que $\angle BAC > \angle B$. N.º 52, 9.

(*Si una cantidad es mayor que otra, y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.*) L. C. D. D.

Proposición XXII. Teorema

114. *Si dos ángulos de un triángulo son desiguales, al mayor ángulo se opone mayor lado.*



Sea ABC un triángulo en que el ángulo A es mayor que el B.

Demostrar que $BC > CA$.

Demostración. El lado BC tiene que ser o igual a CA, o mayor o menor que CA.

Si BC fuera igual a CA,

los ángulos A y B serían iguales. N.º 74

(*En todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.*)

Si CA fuera mayor que BC,

el $\angle B$ sería mayor que el $\angle A$. N.º 113

Pero decir que CA no es mayor que BC es lo mismo que decir que BC no es menor que CA.

Ahora bien, la igualdad

$$\angle A = \angle B$$

y la desigualdad

$$\angle A < \angle B$$

son contrarias al supuesto de que el ángulo A es mayor que el B.

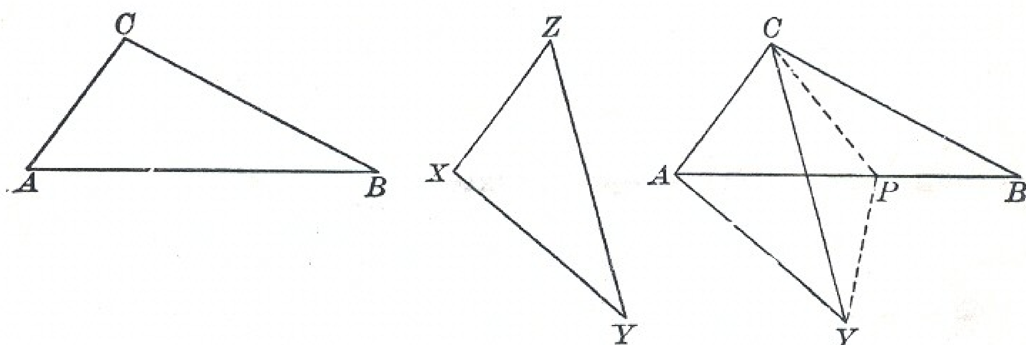
Puesto que BC no puede ser igual a CA ni menor que CA, síguese necesariamente que

$$BC > CA.$$ L.C.D D

Esta proposición es la recíproca de la proposición XXI.

PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA

115. *Si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales a dos lados de otro, y el ángulo comprendido por los dos primeros es mayor que el comprendido por los dos segundos, el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo.*



Sean ABC y XYZ dos triángulos en que $AC = XZ$, $BC = YZ$, y $\angle C > \angle Z$.

Demostrar que $AB > XY$.

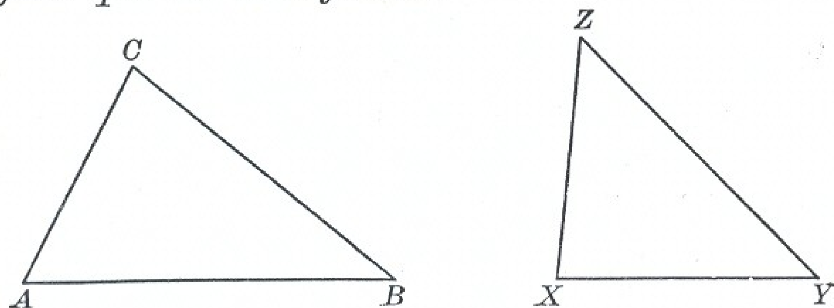
Demostración. Colóquese el $\triangle XYZ$ de modo que XZ coincida con su igual AC, como se ve en la tercera figura. El lado YZ caerá dentro del $\angle ACB$, por ser $\angle C > \angle Z$.

Sea CP la bisectriz del $\angle YCB$. Trácese PY.

Ahora bien,	$CP = CP$,	Ident.
	$CY = CB$,	Por hipót.
	$\angle YCP = \angle PCB$;	Por constr.
	$\therefore \triangle PYC = \triangle PBC$;	N.° 68
	$\therefore PY = PB$.	N.° 67
También:	$AP + PY > AY$;	N.° 53, 3.°
	$\therefore AP + PB > AY$,	N.° 52, 8.°
esto es,	$AB > AY$,	
o sea,	$AB > XY$ (n.° 52, 8.°)	L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA

116. *Si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales a dos lados de otro, y el tercer lado del primer triángulo es mayor que el tercer lado del segundo, el ángulo opuesto al tercer lado es mayor en el primer triángulo que en el segundo.*



Sean ABC y XYZ dos triángulos en que $AC = XZ$, $BC = YZ$, y $AB > XY$.

Demostrar que $\angle C > \angle Z$.

Demostración. El ángulo C debe ser o igual al Z, o menor o mayor que el Z. Examinemos los dos primeros casos.

Si C fuese igual a Z,

el $\triangle ABC$ sería igual al $\triangle XYZ$. N.º 68

(*Dos lados del uno y el ángulo comprendido serían iguales respectivamente a dos lados del otro y el ángulo comprendido.*)

AB sería por tanto igual a XY. N.º 67

Si C fuese menor que Z,

AB sería menor que XY. N.º 115

Como estas conclusiones son contrarias al supuesto de que AB es mayor que XY, síguese que C no puede ser ni igual a Z ni menor que Z, y que por tanto

$\angle C > \angle Z$. **L. C. D. D.**

Esta proposición es la recíproca de la proposición XXIII.

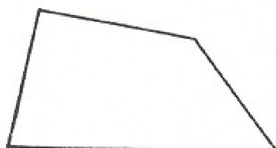
117. Cuadrilátero. Llámase *cuadrilátero* una figura cerrada cuyos límites son cuatro rectas, llamadas *lados* del cuadrilátero.

118. Clasificación de los cuadriláteros. Danse los nombres especiales siguientes a ciertos cuadriláteros :

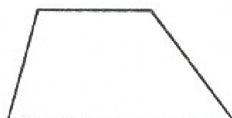
trapecio es el que tiene dos lados paralelos ;

paralelogramo es el que tiene los lados opuestos paralelos.

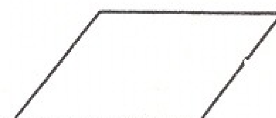
Llámase *trapecio isósceles* el que tiene iguales los lados no paralelos.



Cuadrilátero



Trapecio



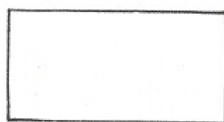
Paralelogramo

119. Rectángulo y rombo. Un paralelogramo se llama

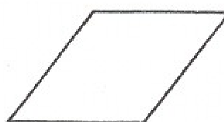
rectángulo cuando sus cuatro ángulos son rectos ;

rombo cuando sus cuatro lados son iguales.

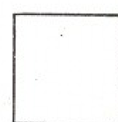
El cuadrado (n.° 65) es a la vez un rectángulo y un rombo.



Rectángulo



Rombo



Cuadrado

120. Base. Llámase *base* de una figura rectilínea el lado sobre que descansa, o se supone que descansa.

El término *base* se emplea a veces en un sentido más general.

En el trapecio, los dos lados paralelos se llaman comúnmente *bases*. En el paralelogramo, dos lados opuestos se llaman también *bases*.

En el triángulo isósceles, como ya se ha visto, se llama generalmente *base* el lado desigual ; y *vértice*, el vértice del ángulo opuesto.

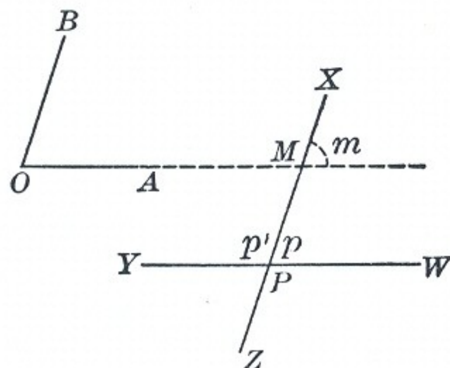
121. Altura. Llámase *altura* de un paralelogramo o trapecio la longitud de la perpendicular trazada de una base a la otra.

La *altura* de un triángulo es la longitud de la perpendicular bajada a la base desde el vértice opuesto.

122. Diagonal. Llámase *diagonal* toda recta que une dos vértices no consecutivos de una figura rectilínea cerrada.

PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA

123. *Si los lados de un ángulo son respectivamente paralelos a los de otro, los dos ángulos son o iguales o suplementarios.*



Sean *AOB* un ángulo cualquiera, y *XZ*, *YW* dos rectas paralelas a los lados del ángulo y que se cortan en *P*.

Demostrar que $\angle p = \angle O$, *y que el ángulo* p' *es el suplemento del ángulo O.*

Demostración. Sea M el punto de intersección de XZ y OA prolongada. Se tiene:

$$\angle O = \angle m, \text{ y } \angle p = \angle m. \qquad \text{N.° 102}$$

(*Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos correspondientes son iguales.*)

$$\therefore \angle p = \angle O. \qquad \text{N.° 52, 7.°}$$

Ahora bien, el $\angle p'$ es el suplemento del $\angle p$. N.° 42

$\therefore$ el $\angle p'$ es el suplemento del $\angle O$. L.C.D.D.

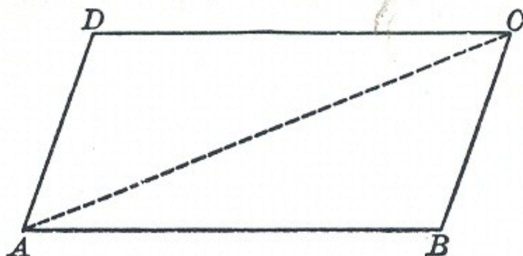
Enúnciense en forma de teorema general las condiciones en que los dos ángulos son iguales y las condiciones en que son suplementarios.

124. COROLARIO. *Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales, y los adyacentes a un mismo lado son suplementarios.*

Dibújese un paralelogramo y demuéstrese que dos ángulos adyacentes a un mismo lado son suplementarios. Aplíquese el principio del n.° 58, demostrando que los suplementos de dos ángulos opuestos son iguales.

PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA

125. *En todo paralelogramo, cada lado es igual a su opuesto.*



Sea *ABCD* un paralelogramo cualquiera.

Demostrar que $BC = AD$, *y* $AB = DC$.

Demostración. Trácese la diagonal AC.

En los $\triangle\triangle$ ABC y ADC,

$AC = AC$, Ident.

$\angle BAC = \angle DCA$,

$\angle ACB = \angle CAD$; N.º 100

$\therefore \triangle ABC = \triangle ADC$. N.º 72

$\therefore BC = AD$, $AB = DC$. L. C. D. D.

126. COROLARIO 1.º *Cada diagonal de un paralelogramo lo divide en dos triángulos iguales.*

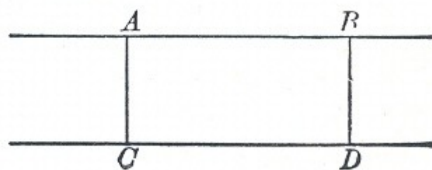
¿En qué teorema se funda esta proposición?

127. COROLARIO 2.º *Los segmentos de paralelas comprendidos entre paralelas son iguales.*

¿Cómo se demuestra este corolario aplicando la proposición del n.º 125?

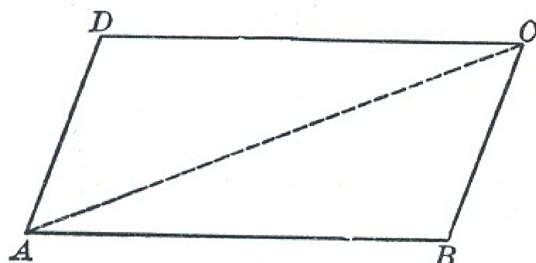
128. COROLARIO 3.º *Dos paralelas cualesquiera se hallan a una misma distancia en todos sus puntos.*

Si AB y CD son paralelas, ¿qué puede afirmarse de las perpendiculares bajadas a CD de puntos cualesquiera de AB? (N.º 127.)



PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA

129. *Si cada lado de un cuadrilátero es igual a su opuesto, el cuadrilátero es un paralelogramo.*



Sea $ABCD$ un cuadrilátero en que BC es igual a AD y AB es igual a DC.

Demostrar que el cuadrilátero $ABCD$ es un paralelogramo.

Demostración. Trácese la diagonal AC.

En los $\triangle ABC, CDA$,

$BC = AD$, Por hipót

$AB = DC$, Por hipót.

$AC = AC$. Ident.

Por consiguiente,

$\triangle ABC = \triangle CDA$. N.° 80

(*Si los tres lados de un triángulo son respectivamente iguales a los tres lados de otro, los dos triángulos son iguales.*)

$\therefore \angle BAC = \angle DCA$,

$\angle ACB = \angle CAD$. N.° 67

$\therefore AB$ es $\parallel$ a DC,

e igualmente

BC es $\parallel$ a AD. N.° 101

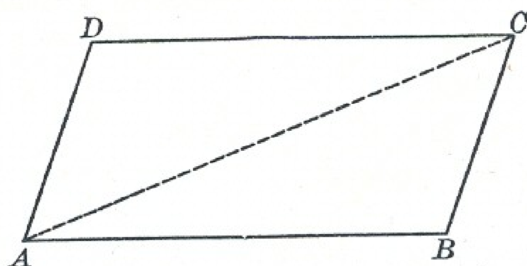
(*Si dos rectas situadas en un mismo plano forman con una trasversal ángulos alternos-internos iguales, esas dos rectas son paralelas.*)

$\therefore ABCD$ es un paralelogramo (n.° 118). L.C.D.D.

Esta proposición es la recíproca de la proposición XXVI.

Proposición XXVIII. Teorema

130. *Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y paralelos, los otros dos también lo son, y por tanto el cuadrilátero es un paralelogramo.*



Sea *ABCD* un cuadrilátero en que el lado *AB* es igual y paralelo al lado *DC*.

Demostrar que el cuadrilátero ABCD es un paralelogramo.

Demostración. Trácese la diagonal AC.

En los triángulos ABC, CDA,

$AC = AC$, Ident.

$AB = DC$, Por hipót.

$\angle BAC = \angle DCA$. No.° 100

(Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos alternos-internos son iguales.)

$\therefore \triangle ABC = \triangle CDA$. N.° 68

(Si dos lados de un △ y el ∠ comprendido son respectivamente iguales a dos lados y el ∠ comprendido de otro △, los dos ⚠ son iguales.)

$\therefore BC = AD$, y $\angle ACB = \angle CAD$; N.° 67

$\therefore BC$ es $\parallel$ a AD. N.° 101

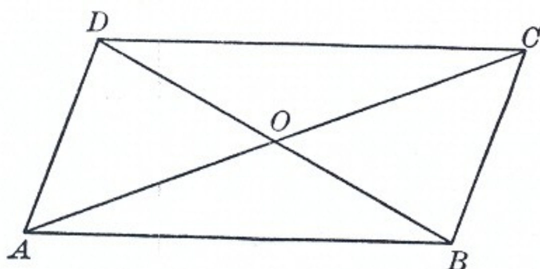
(Si dos rectas situadas en un mismo plano forman con una trasversal ángulos alternos-internos iguales, esas dos rectas son paralelas.)

Ahora bien, AB es $\parallel$ a DC. Por hipót.

$\therefore ABCD$ es un paralelogramo (n.° 118). L. C. D. D.

PROPOSICIÓN XXIX. TEOREMA

131. *Las diagonales de un paralelogramo se dividen mutuamente en partes iguales.*



Sea $ABCD$ un paralelogramo cuyas diagonales AC y BD se cortan en el punto O.

Demostrar que $AO = OC$

y que $BO = OD$.

Demostración. Si demostramos que el $\triangle AOB$ es igual al COD, o que el BOC lo es al AOD, habremos demostrado el teorema, puesto que los lados homólogos de triángulos iguales son iguales.

En los $\triangle AOB$ y COD,

$AB = CD$, N.º 125

(*Los lados opuestos de un* ▱ *son iguales.*)

$\angle BAO = \angle DCO$,

$\angle OBA = \angle ODC$. N.º 100

(*Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos alternos-internos son iguales.*)

Por consiguiente,

$\triangle AOB = \triangle COD$. N.º 72

(*Dos triángulos son iguales si tienen iguales respectivamente un lado y los ángulos adyacentes a ese lado.*)

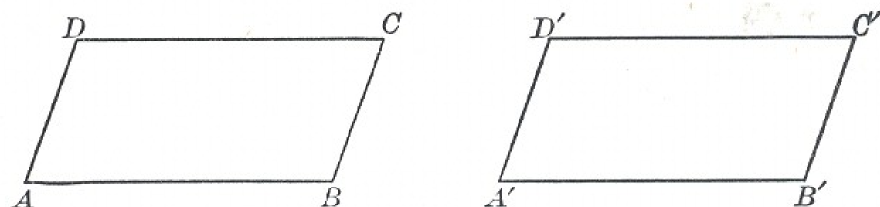
$\therefore AO = OC$

y también

$BO = OD$ (n.º 67). L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XXX. TEOREMA

132. *Si dos lados adyacentes de un paralelogramo y el ángulo comprendido son respectivamente iguales a los de otro, los dos paralelogramos son iguales.*



Sean $ABCD$, $A'B'C'D'$ dos paralelogramos en que $AB = A'B'$, $AD = A'D'$, y $\angle A = \angle A'$.

Demostrar que los dos paralelogramos son iguales.

Demostración. Colóquese el $\square ABCD$ sobre el $A'B'C'D'$ de tal suerte que AB coincida con su igual $A'B'$. N.° 53, 5.°

El lado AD tomará la dirección de $A'B'$.

(*Síguese esto de que se supone que $\angle A = \angle A'$.*)

D caerá en D'.

(*Síguese esto de que se supone que $AD = A'D'$.*)

Ahora bien, DC y $D'C'$ son ‖s a $A'B'$ que pasan por el punto D'.

∴ DC tomará la dirección de $D'C'$. N.° 94

(*Por un punto cualquiera puede trazarse una paralela a una recta dada, y sólo una.*)

También, BC, $B'C'$ son ‖s a $A'D'$ que pasan por B.

∴ BC tomará la dirección de $B'C'$. N.° 94

∴ C caerá sobre C'. N.° 55

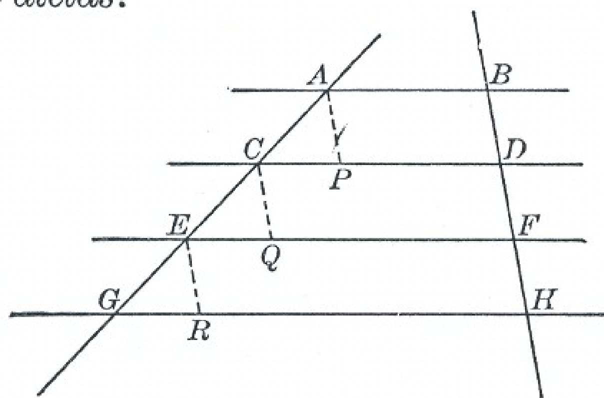
∴ los dos ▱s coinciden y son por tanto iguales. L.C.D.D.

133. COROLARIO. *Si dos rectángulos tienen las bases y las alturas respectivamente iguales, los dos rectángulos son iguales.*

Hágase ver que éste es un caso especial de la proposición XXX. ¿Cuáles son los lados respectivamente iguales?

Proposición XXXI. Teorema

134. *Si los segmentos determinados en una trasversal por tres o más paralelas son iguales, también son iguales los determinados en cualquiera otra trasversal por las mismas paralelas.*



Sean AB, CD, EF, GH cuatro paralelas que determinan en la trasversal BH los segmentos iguales BD, DF, FH, y los segmentos AC, CE, EG en otra trasversal AG.

Demostrar que $AC = CE = EG$

Demostración. Trácense AP, CQ, ER ||s a BH.

Los ∡s APC, CQE, ERG son respectivamente iguales a BDC, DFE, FHG. N.° 102

Ahora bien, los ∡s BDC, DFE, FHG son iguales; N.° 102

∴ los ∡s APC, CQE, ERG son iguales. N.° 52, 7.°

AP, CQ, ER son ||s. N.° 96

∴ los ∡s CAP, ECQ, GER son iguales. N.° 102

También, $AP = BD$, $CQ = DF$, $ER = FH$. N.° 127

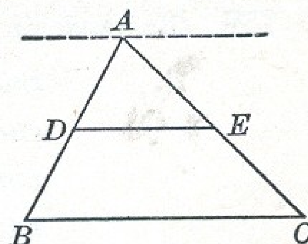
Además, $BD = DF = FH$; Por hipót.

∴ $AP = CQ = ER$; N.° 52, 7.°

∴ los △s CPA, EQC, GRE son iguales. N.° 72

∴ $AC = CE = EG$ (n.° 67). L.C.D.D

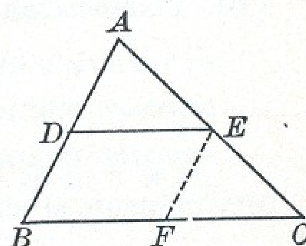
135. COROLARIO 1.° *Si una recta bisecta un lado de un triángulo y es paralela a otro lado, bisecta también el tercer lado.*



Supóngase que D es el punto medio de AB, y que DE es ∥ a BC. Trácese por el vértice A una recta ∥ a BC. ¿ Por qué es tal recta paralela también a DE ? Puesto que se supone que estas tres paralelas determinan segmentos iguales en el lado AB, ¿ qué se deduce en cuanto a los segmentos AE y EC del lado AC ?

Escríbase la demostración completa de este corolario.

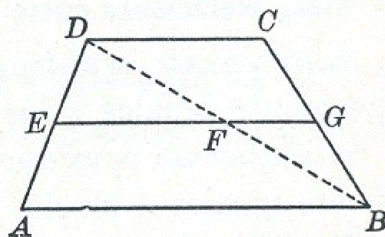
136. COROLARIO 2.° *La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado e igual a la mitad de ese lado.*



Si DE es paralela a BC, y D es el punto medio de AB, ¿ cómo divide a AC ? Síguese que la recta que une los puntos medios de AB y AC coincide con esta ∥ y es ∥ a BC. Si EF es ∥ a AB, ¿ cómo divide a BC ? ¿ Cuál es la relación entre BF, FC, BC ? Puesto que el cuadrilátero $BFED$ es un paralelogramo (n.°118), ¿ qué se sigue en cuanto a la igualdad de DE, BF y $\frac{1}{2}BC$?

137. COROLARIO 3.° *La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio es igual a la semisuma de las bases (esto es, a un medio de la suma de las bases).*

Trácese la diagonal BD. En el $\triangle ABD$, únase E, punto medio de AD, con F, punto medio de DB. ¿ Qué relaciones existen entre EF y AB (n.° 136) ? En el $\triangle DBC$, únase F con G, punto medio de BC. ¿ Qué relaciones existen entre FG y DC ? Entonces, ¿ qué relación existe entre el lado AB y el segmento FG ? Como por el punto F no puede trazarse más de una paralela a AB (n.° 94), FG es prolongación de EF. Luego EFG es paralela a AB e igual a $\frac{1}{2}(AB + DC)$.



Escríbase la demostración completa.

138. Polígono. Llámase *polígono* una porción de un plano limitada por segmentos de rectas.

Estos segmentos se llaman *lados* del polígono.

139. Clasificación de los polígonos según los lados. Llámase

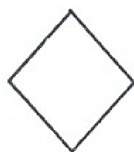
triángulo un polígono de tres lados;
cuadrilátero, uno de cuatro;
pentágono, uno de cinco;
exágono, uno de seis;
octógono, uno de ocho;
decágono, uno de diez;
dodecágono, uno de doce.

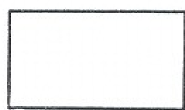
Polígono equilátero es el que tiene todos los lados iguales.

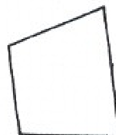
140. Clasificación según los ángulos. Dícese que un polígono es

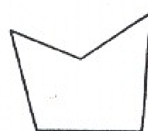
equiángulo cuando todos sus ángulos son iguales;
convexo cuando no tiene ángulos internos entrantes;
cóncavo cuando tiene ángulos internos entrantes.

Generalmente el término *polígono* se aplica sólo a los convexos.


Equilátero


Equiángulo


Convexo


Cóncavo

141. Polígono regular. Llámase *polígono regular* el que es a la vez equilátero y equiángulo.

142. Relaciones entre dos polígonos. Dos polígonos son

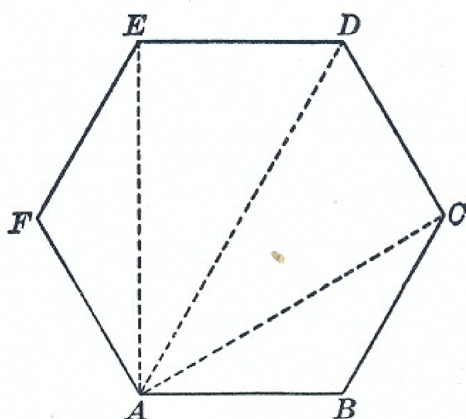
mutuamente equiángulos si los ángulos del uno son respectivamente iguales a los del otro, tomados en un mismo orden;

mutuamente equiláteros si los lados del uno son respectivamente iguales a los del otro, tomados en un mismo orden.

Es evidente que dos polígonos son iguales si son a la vez mutuamente equiángulos y mutuamente equiláteros, puesto que pueden hacerse coincidir en todas sus partes.

Proposición XXXII. Teorema

143. *La suma de los ángulos internos de un polígono es igual a dos rectos multiplicado por el exceso del número de lados del polígono sobre dos.*



Sea *ABCDEF* un polígono de *n* lados.

Demostrar que la suma de los ∠s internos es 2 rt. × (n − 2).

Demostración. Trácense las diagonales AC, AD, AE.

La suma de los ∠s de los △s así formados es igual a la suma de los ∠s del polígono. N.° 52, 10.°

El número de △s es $n - 2$.

(*A cada lado corresponde un* △, *menos a* AB *y a* AF.)

La suma de los ∠s de cada △ = 2 rt. N.° 10?

∴ la suma de los ∠s de los $(n - 2)$ △s, o sea, la suma de los del polígono, es 2 rt. × $(n - 2)$. L.C.D.D

144. Corolario 1.° *La suma de los ángulos de un cuadrilátero es igual a cuatro rectos, y si los ángulos son iguales, son rectos.*

145. Corolario 2.° *Cada ángulo de un polígono regular de* n *lados es igual a* $\frac{2(n-2)}{n}$ *rectos.*

EJERCICIO 12

1. ¿Cuál es la suma de los ángulos: *a*) de un pentágono; *b*) de un exágono; *c*) de un eptágono (siete lados); *d*) de un octógono; *e*) de un decágono; *f*) de un dodecágono; *g*) de un polígono de 24 lados?

2. ¿Cuál es el valor de cada ángulo en los siguientes polígonos regulares: *a*) el pentágono, *b*) el exágono, *c*) el octógono, *d*) el decágono, *e*) el polígono de 32 lados?

3. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo vale $1\frac{3}{4}$ rectos?

4. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo vale $1\frac{3}{7}$ rectos?

5. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo es de 108°?

6. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo es de 140°?

7. ¿Cuántos lados tiene un polígono regular en que cada ángulo es de 156°?

8. Cuatro de los ángulos de un pentágono son de 120°, 80°, 90° y 100° respectivamente. Hállese el valor del otro.

9. Cinco de los ángulos de un exágono son de 100°, 120°, 130°, 150° y 90° respectivamente. Hállese el valor del otro.

10. Los ángulos de un cuadrilátero son x, $2x$, $2x$ y $3x$. ¿Cuáles son sus valores?

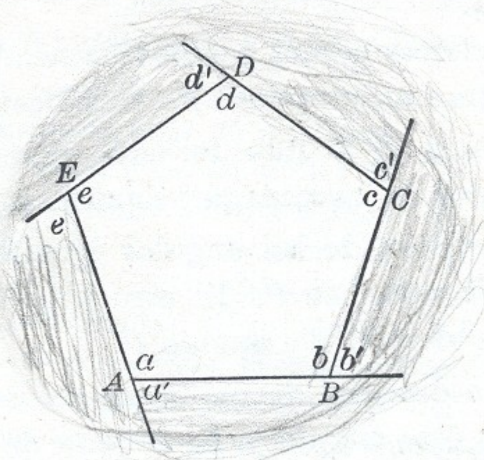
11. El segundo de los ángulos de un cuadrilátero es el doble del primero, el tercero es el triplo del primero, y el cuarto es el cuádruplo del primero. Hállense los cuatro ángulos.

12. Los ángulos de un exágono son x, $2\frac{1}{2}x$, $3\frac{1}{2}x$, $2x$, $2x$ y x. Calcúlense sus valores.

13. La suma de dos ángulos de un triángulo es 100°, y la diferencia es 40°. Calcúlense los tres ángulos del triángulo.

Proposición XXXIII. Teorema

146. *La suma de los ángulos externos de un polígono, formados prolongando los lados sucesivamente, es igual a cuatro rectos.*



Sea *ABCDE* un polígono de *n* lados, y sean a', b', c', d' y e' los angulos externos formados prolongando los lados consecutivamente.

Demostrar que la suma de los ∠s *externos es cuatro rectos.*

Demostración. Represéntense por a, b, c, d, e los ángulos del polígono adyacentes a a', b', c', d', e' respectivamente.

Entonces se tiene:

$$\angle a + \angle a' = 2 \text{ rt.}$$

$$\angle b + \angle b' = 2 \text{ rt.} \qquad \text{N.° 43}$$

(*La suma de los dos* ∠s *adyacentes que una recta forma con otra es igual a 2 rt.*)

Asímismo, la suma de todo otro ángulo interno y el externo adyacente es 2 rt.

Como el polígono tiene n lados, hay n pares de ángulos adyacentes suplementarios, y por tanto la suma de los ángulos externos e internos es $2\,n$ rt.

Pero la suma de los ∠s internos $= 2\,(n-2)$ rt. N.° 143

$$= 2\,n \text{ rt.} - 4 \text{ rt.}$$

∴ suma de los ∠s externos $= 2\,n$ rt. $-$ $(2\,n$ rt. $-$ 4 rt.$) = 4$ rt.

L.C.D.D.

EJERCICIO 13

1. Uno de los ángulos externos de un triángulo es de 130°, y uno de los internos opuestos, de 32°. Hállense los ángulos del triángulo.

2. Las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un rectángulo se encuentran en un punto P. Calcúlese el ángulo P.

3. Determínese el ángulo formado por las bisectrices de dos de los ángulos de un triángulo equilátero.

4. Las bisectrices de los ángulos iguales de un triángulo isósceles se encuentran en P. El otro ángulo del triángulo es de 30°. Hállese el valor del ángulo P.

5. El ángulo desigual de un triángulo isósceles es de 40°. La bisectriz de este ángulo y la de uno de los otros dos se encuentran en P. Hállese el valor del ángulo P.

6. Un ángulo externo de un paralelogramo es la octava parte de la suma de los cuatro ángulos externos. ¿Cuáles son los ángulos del paralelogramo?

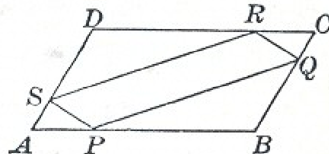
7. ¿Cuántos grados tiene cada ángulo externo: *a*) de un exágono regular, *b*) de un octógono regular?

8. En un triángulo rectángulo, uno de los ángulos agudos es el doble del otro. Calcúlense los ángulos externos.

9. Prepárese una tabla que dé el valor de cada ángulo interno y externo de los polígonos regulares de tres, cuatro, cinco . . . diez lados.

10. Demuéstrese que si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan mutuamente, el cuadrilátero es un paralelogramo.

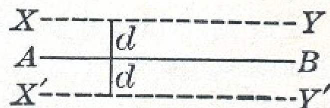
11. En el paralelogramo AC, $AP = CR$, $BQ = DS$. Demuéstrese que $PQRS$ también es un paralelogramo.



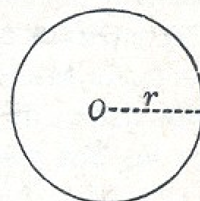
12. Demuéstrese que las rectas que unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un paralelogramo forman otro paralelogramo.

147. Lugar geométrico. Llámase *lugar geométrico* de un punto que satisface ciertas condiciones, o de todos los puntos que satisfacen ciertas condiciones, la línea o superficie formada por todos los puntos que satisfacen esas condiciones, o engendrada por un punto que se mueve sujeto a esas condiciones.

Por ejemplo, si un punto de un plano está sujeto a la condición única de hallarse a una distancia dada de una recta dada del plano, debe hallarse en una u otra de las dos paralelas cuya distancia a la recta dada es igual a la distancia dada. Cualquier punto de estas paralelas satisface la condición dada, y ningún punto fuera de ellas puede satisfacerla. Si, por ejemplo, AB es la recta dada y d la distancia dada, el lugar geométrico del punto en cuestión es el par de paralelas XY, $X'Y'$.



El lugar geométrico de todos los puntos de un plano situados a una distancia dada r de un punto dado O es la circunferencia del círculo cuyo centro es O y cuyo radio es r.



EJERCICIO 14

¿Cuál es el lugar geométrico de:

1. Un punto situado a 4 cm. de un punto fijo O?

2. La punta del minutero de un reloj?

3. El centro de la rueda de un carruaje que marcha en línea recta en un camino horizontal?

4. Un punto igualmente distante de dos paralelas cuya distancia es de 3 cm.?

5. Un punto situado en esta página a 2 cm. del borde de la derecha?

6. La punta de un lápiz redondo que rueda sobre una mesa sin que el eje gire?

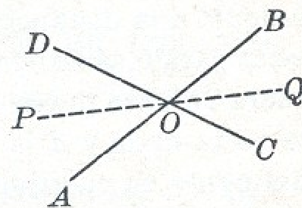
7. Las puntas de unas tijeras al abrirse y cerrarse, suponiendo que el tornillo sobre que giran no cambie de posición?

8. El centro de un círculo que rueda sobre la circunferencia de otro círculo?

148. Determinación de lugares geométricos. Para demostrar que una línea o un sistema de líneas es el lugar geométrico de un punto que llena ciertos requisitos, es necesario y suficiente demostrar dos cosas, a saber:

1.ª *Que todo punto del supuesto lugar satisface las condiciones*
2.ª *Que ningún otro punto las satisface.*

Por ejemplo, si se desea hallar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de las rectas AB, CD, no basta demostrar que todo punto de la bisectriz PQ equidista de ellas: es necesario demostrar además que ningún punto situado fuera de PQ satisface esta condición. En este caso hay otra recta, la bisectriz de BOD, que satisface la condición dada; de suerte que el lugar en cuestión consta de las dos bisectrices.



149. Perpendicular bisectriz. Llámase *perpendicular bisectriz* de una recta la perpendicular que pasa por el punto medio de esa recta.

EJERCICIO 15

Trácense los siguientes lugares geométricos, sin demostrar que lo son:

1. Lugar de los puntos situados a 1 cm. bajo la base de un triángulo dado ABC.

2. Lugar de los puntos distantes 45 mm. de una recta dada AB.

3. Lugar de los puntos distantes 3 cm. de un punto fijo O.

4. Lugar de los puntos distantes 25 mm. de la circunferencia de un círculo de 40 mm. de radio, y situados fuera del círculo.

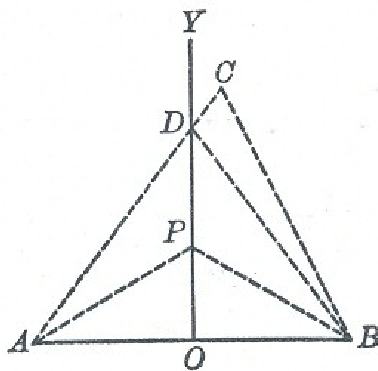
5. Lugar de los puntos distantes 25 mm. de la circunferencia de un círculo de 40 mm. de radio, y situados dentro del círculo.

6. Lugar de los puntos distantes 25 mm. de la circunferencia de un círculo de 40 mm. de radio.

7. Lugar de los puntos que equidistan de dos paralelas situadas a 40 mm. una de otra.

PROPOSICIÓN XXXIV. TEOREMA

150. *La perpendicular bisectriz de una recta es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de los extremos de la recta.*



Sea OY la perpendicular bisectriz de la recta AB.

Demostrar que OY es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de A y B.

Demostración. Sean P un punto de OY, y C un punto cualquiera exterior a OY.

Trácense PA, PB, CA, CB.

Puesto que	$AO = BO$,	Por hipót
y también	$OP = OP$,	Ident
síguese que	$\triangle AOP = \triangle BOP$.	N.° 90
	$\therefore PA = PB$.	N.° 67

Sea D la intersección de CA y OY. Trácese DB.

Síguese como antes que $DA = DB$.

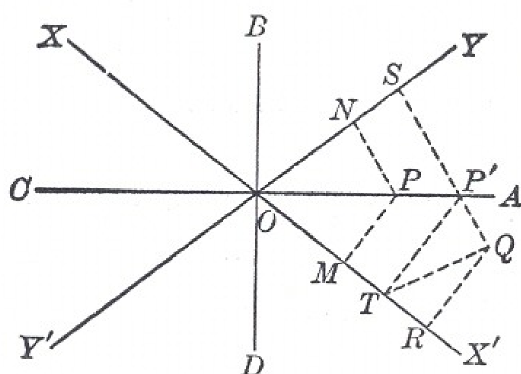
Ahora bien,	$CB < CD + DB$;	N.° 53, 3.°
	$\therefore CB < CD + DA$,	N.° 52, 8.°
esto es,	$CB < CA$.	

$\therefore OY$ es el lugar geométrico dicho (n.° 148). L.C.D.D.

151. COROLARIO. *Dos puntos equidistantes de los extremos de una recta determinan la perpendicular bisectriz de esa recta.*

Proposición XXXV. Teorema

152. *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos rectas que se cortan consta de las dos bisectrices de los ángulos formados por las dos rectas.*



Sean XX', YY' dos rectas que se cortan en O. Sean CA la bisectriz de YOX', y BD la de XOY.

Demostrar que las rectas CA y BD constituyen el lugar geométrico de los puntos equidistantes de XX' e YY'.

Demostración. Sean P un punto cualquiera de CA o BD, y Q un punto cualquiera exterior a estas rectas. Trácense PM y QR ⊥s a XX', y PN y QS ⊥s a YY'.

$\angle MOP = \angle PON,$	Por hipót.
$OP = OP;$	Ident.
$\therefore \triangle OMP = \triangle ONP.$	N.° 91
$\therefore PM = PN.$	N.° 67

Sea P' la intersección de QS y OA. Trácense $P'T \perp$ a XX', y QT. Síguese como antes que $P'T = P'S$.

Ahora bien,	$P'T + P'Q > QT,$	N.° 53, 3.°
	$QT > QR;$	N.° 86
	$\therefore P'T + P'Q > QR.$	N.° 52, 9.°

Sustituyendo, $P'S + P'Q > QR$, o $QS > QR$.

∴ las dos bisectrices forman el lugar dicho (n.° 148). L. C. D. D

153. Método sintético de demostración. Como queda dicho (n.º 78), el método sintético de demostración es un encadenamiento de verdades conocidas que conduce necesariamente a otra verdad que se trata de establecer.

Éste es el método más común. Es el que debe aplicarse a la demostración de los teoremas que se dan como ejercicios en las dos páginas siguientes.

154. Líneas concurrentes. Llámanse *líneas concurrentes* las que se encuentran en un punto.

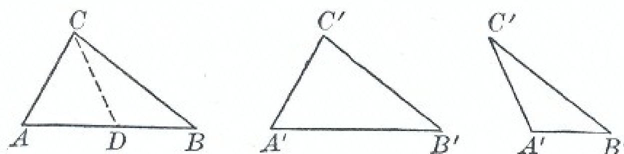
155. Medianas de un triángulo. Denomínanse *medianas* de un triángulo las tres rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos.

EJERCICIO 16

1. Si dos lados de un triángulo son respectivamente iguales a dos de otro, y los ángulos opuestos a dos de los lados iguales son iguales, los opuestos a los otros dos lados iguales son o iguales o suplementarios; si iguales, los triángulos también lo son.

Supóngase $AC = A'C'$, $BC = B'C'$, y $\angle B = \angle B'$.

Colóquese el $\triangle A'B'C'$ sobre el ABC de suerte que $B'C'$ coincida con BC, y que los ∡ A' y A queden de un mismo lado de BC.



Puesto que $\angle B' = \angle B$, ¿qué dirección tomará $B'A'$? Entonces A' caerá en A o en algún otro punto, como D, de BA. Si A' cae en A, ¿qué se deduce? si en D, ¿son iguales los △ $A'B'C'$ y DBC?

Puesto que $CD = C'A' = CA$, ¿qué relación existe entre los ∡ A y CDA? ¿Qué se sigue entonces en cuanto a la relación entre los ∡ CDA y BDC, y entre los ∡ A y BDC?

Trácense figuras y demuéstrese que los triángulos son iguales:

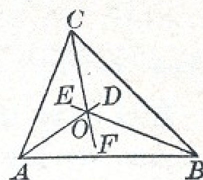
1.º Si los ángulos B y B' son ambos rectos u obtusos;

2.º Si los ángulos A y A' son ambos agudos, rectos u obtusos;

3.º Si AC y $A'C'$ no son menores que BC y $B'C'$ respectivamente.

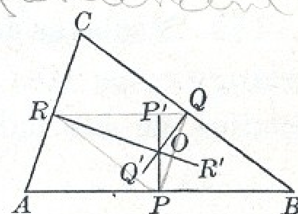
2. Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo concurren en un punto equidistante de los lados. (incentro)

Demuéstrese que las dos bisectrices AD y BE deben encontrarse en algún punto, como O. Demuéstrese que O equidista de AC y AB, y también de BC y AB, y por tanto de AC y BC. Ahora bien, ¿ pertenece O a la bisectriz del $\angle C$?



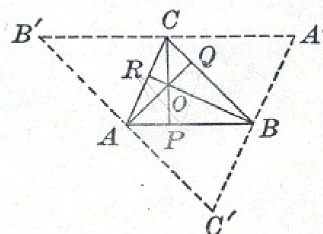
3. Las perpendiculares bisectrices de los tres lados de un triángulo concurren en un punto equidistante de los vértices. (circuncentro)

Las perpendiculares bisectrices de AC y BC se encuentran en algún punto, como O. ¿ Por qué ? Demuéstrese que O equidista de B y C, también de C y A, y por tanto de A y B. Por tanto, ¿ es O un punto de la perpendicular bisectriz PP' ?



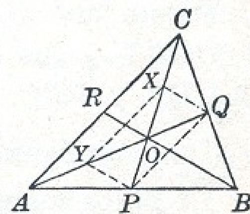
4. Las perpendiculares trazadas de los vértices de un triángulo a los lados opuestos son concurrentes.

Sean AQ, BR, CP las ⊥s. Trácense $B'C'$, $C'A'$, $A'B'$, por A, B, C, paralelas respectivamente a los lados CB, AC, BA. Demuéstrese que $C'A = BC = AB'$. Análogamente, ¿ cuáles son los puntos medios de $C'A'$ y $A'B'$? ¿ Por qué se sigue de aquí que AQ, BR y CP son las perpendiculares bisectrices de los lados del $\triangle A'B'C'$? Véase el ejercicio precedente.

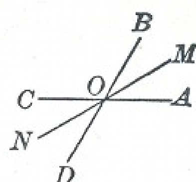


5. Las medianas de un triángulo se encuentran en un punto cuya distancia a cada vértice es igual a dos tercios de la mediana trazada de ese vértice.

Sea O el punto de intersección de las medianas AQ, CP. Si Y es el punto medio de AO, y X el de CO, demuéstrese que XY y PQ son paralelas a AC e iguales a $\frac{1}{2}AC$. Demuéstrese luégo que $AY = YO = OQ$, y $CX = XO = OP$. Síguese que la distancia del punto de intersección de una *cualquiera* de las medianas con otra *cualquiera* es ¿ qué parte de aquélla ?



El punto de intersección de las medianas de un triángulo es el *centro de gravedad* del triángulo.

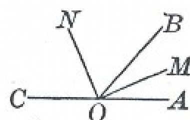


6. Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice están en línea recta.

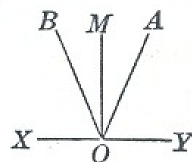
7. La bisectriz prolongada de uno de dos ángulos opuestos por el vértice bisecta también el otro.

8. Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí.

9. Las bisectrices de los dos pares de ángulos opuestos por el vértice formados por dos rectas que se cortan son perpendiculares entre sí.



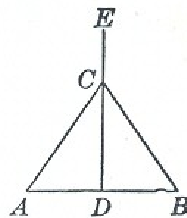
10. Si las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares entre sí, los dos ángulos son suplementarios.



11. Si por el vértice de un ángulo se traza una perpendicular a la bisectriz del ángulo, formará ángulos iguales con los lados del ángulo.

12. La bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles bisecta el lado opuesto y es perpendicular a él.

13. La perpendicular bisectriz de la base de un triángulo isósceles es la bisectriz del ángulo opuesto.



14. Si la perpendicular bisectriz de un lado de un triángulo pasa por el vértice opuesto, el triángulo es isósceles.

15. Todo punto de la bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles equidista de los extremos del lado opuesto.

16. Si dos triángulos isósceles tienen una misma base, la recta que une los vértices opuestos a la base es la perpendicular bisectriz de la base.

17. Si los lados de un ángulo son respectivamente perpendiculares a los lados de otro, los dos ángulos son o iguales o suplementarios.

¿Cuándo son iguales los ángulos, y cuándo suplementarios?

156. Método analítico de demostración. En el *método analítico* de demostración, la verdad de una proposición se hace depender de la de otra no demostrada aún, pero que se demuestra en el curso mismo del razonamiento y de la cual la que se trata de demostrar se deduce necesariamente.

Éste es el método que se emplea cuando las circunstancias no indican claramente la marcha que debe seguirse para aplicar el método sintético.

EJERCICIO 17

1. El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo equidista de los tres vértices.

Sea M el punto medio de la hipotenusa AC.

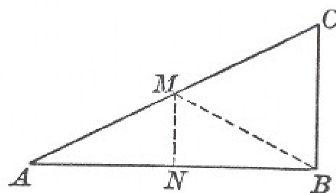
Demostrar que M equidista de A, B y C.

Razonamos así: M equidista de A, B y C si $AM = BM$. ¿Es esto cierto?

$AM = BM$ si la $\perp$ MN divide el $\triangle ABM$ en dos $\triangle$ iguales.

Los $\triangle$ ANM, BNM son iguales si $AN = NB$.

Ahora bien, $AN = NB$ (n.º 135), por ser $MN \parallel$ a CB, y $AM = MC$.

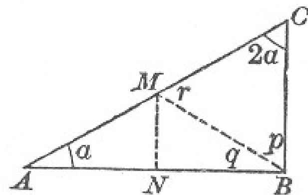


Luego el teorema es verdadero.

Puede ahora darse la demostración por el método sintético, invirtiendo el orden del razonamiento.

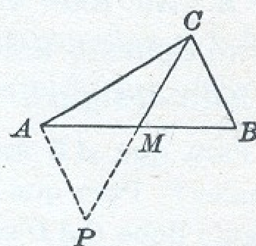
2. Si uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es el doble del otro, la hipotenusa es igual al doble del cateto más corto.

Dados $\angle A = \angle a$, y $\angle C = 2a$, demostrar que $AC = 2BC$. Sea M el punto medio de AC. Entonces $AC = 2BC$ si $AM = BC$. ¿Por qué? Trácese $MN \parallel$ a CB. ¿Qué relación hay entre AN y NB? ¿Qué se sigue de aquí en cuanto a los $\triangle$ ANM, BNM? ¿Y qué se sigue entonces en cuanto a AM y BM? ¿y en cuanto a los $\angle$ a y q? Luego la proposición es verdadera si $BM = BC$. Ahora bien, $BM = BC$ si $\angle 2a = \angle r$, o si $\angle 2a = \angle a + \angle q$, o si $\angle a = \angle q$. Como hemos demostrado que $AM = BM$, síguese que $\angle a = \angle q$.



Inviértase el razonamiento siguiendo el método sintético.

3. Una mediana de un triángulo es menor que la semisuma de los dos lados que la comprenden.



Sea CM una de las medianas del $\triangle ABC$.

Demostrar que $CM < \frac{1}{2}(BC + CA)$.

Ahora bien, si $2\,CM < BC + CA$,

se tendrá también: $CM < \frac{1}{2}(BC + CA)$.

Esto sugiere la prolongación de CM hasta P, haciendo $MP = CM$. Trácese AP.

Entonces, $CP = 2\,CM$,

y también $2\,CM < BC + CA$ si $CP < BC + CA$.

Sábese que $CP < AP + CA$; N.º 53, 3.º

$\therefore CP < BC + CA$ si $BC = AP$,

y también $BC = AP$ si $\triangle MBC = \triangle MAP$.

Tiénese: $\triangle MBC = \triangle MAP$, N.º 68

puesto que $MB = MA$, Por hipót

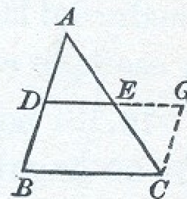
$CM = MP$, Por constr.

$\angle BMC = \angle AMP$. N.º 60

$\therefore CP < BC + CA$;

$\therefore CM < \frac{1}{2}(BC + CA)$.

4. La recta que bisecta dos lados de un triángulo es paralela al tercer lado.



Supóngase $AD = DB$, $AE = EC$.

Demostrar que DE es $\parallel$ a BC.

Por C trácese una $\parallel$ a BA. Prolónguese DE hasta su intersección G con esta paralela.

DE es $\parallel$ a BC si $BCGD$ es un $\square$. N.º 118

$BCGD$ es un $\square$ si $CG = BD$. N.º 130

$CG = BD$ si ambos son iguales a AD.

Ahora bien, $BD = AD$. Por hipót.

$CG = AD$ si $\triangle CGE = \triangle ADE$.

Estos dos $\triangle$ son iguales (n.º 72), pues

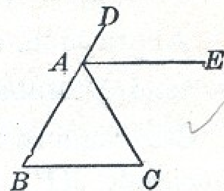
$EC = AE$, Por hipót.

$\angle CEG = \angle AED$, N.º 60

$\angle GCE = \angle A$. N.º 100

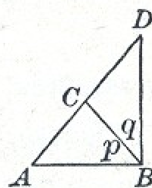
5. Dos triángulos isósceles son iguales si tienen iguales respectivamente un lado y un ángulo.

6. En todo triángulo isósceles, la bisectriz del ángulo externo opuesto a los ángulos iguales es paralela al lado desigual.



Para que AE sea ∥ a BC, ¿qué ángulos deben ser iguales? Para que estos ángulos sean iguales, ¿de qué ángulo debe CAD ser el doble?

7. Si uno de los lados iguales de un triángulo isósceles se prolonga más allá del vértice, haciendo la prolongación igual al lado mismo, y del extremo de ella se traza una recta al vértice opuesto, ésta es perpendicular a la base.

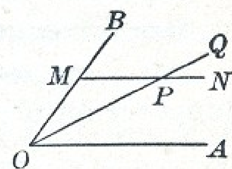


Para que el $\angle DBA$ sea recto, ¿a la suma de cuáles debe ser igual? Lo será si el $\angle p$ es igual a cierto ángulo, y el $\angle q$ igual a cierto ángulo. ¿Cuáles son estos ángulos?

8. Si los lados iguales de un triángulo isósceles se prolongan más allá del vértice en longitudes iguales, las distancias de los extremos de dichas prolongaciones a los vértices opuestos son iguales.

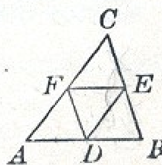
9. Si la recta que une un vértice de un triángulo al punto medio del lado opuesto es la mitad de ese lado, el ángulo opuesto a ese lado es recto.

10. Si por un punto cualquiera de la bisectriz de un ángulo se traza una paralela a uno de los lados del ángulo, el triángulo así formado es isósceles.



11. Por un punto cualquiera C de una recta AB se traza una recta indefinida. De dos puntos de esta recta equidistantes de C se trazan perpendiculares a AB. Demuéstrese que estas perpendiculares son iguales.

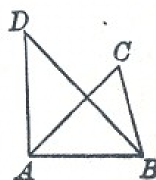
12. Las rectas que unen los puntos medios de los lados de un triángulo dividen el triángulo en cuatro triángulos iguales.



157. Demostración por reducción al absurdo. Llámase *reducción al absurdo* el método de demostración en que se supone que la proposición que trata de demostrarse no es verdadera, y de tal suposición se deducen consecuencias que son absurdas o falsas, las cuales demuestran por tanto que la suposición en cuestión es también falsa.

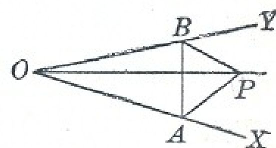
EJERCICIO 18

1. Dados los triángulos ABC, ABD, con el lado AB común y el vértice C fuera del triángulo ABD, demostrar que si AC es igual a AD, BC no puede ser igual a BD.



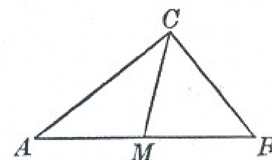
Supóngase $BC = BD$, y demuéstrese que en tal caso D y C coincidirían, lo que es contra el supuesto.

2. En los lados del ángulo XOY se toman los segmentos iguales OA, OB. Sobre AB se construye un triángulo APB en que AP es mayor que BP. Demuéstrese que P está fuera de la bisectriz del ángulo XOY.



Supóngase que OP bisecta el $\angle XOY$. ¿Cuál es la consecuencia? ¿Es eso posible?

3. Por el punto medio M de la recta AB se traza a AB una oblicua MC. Demuéstrese que CA no puede ser igual a CB.



Supóngase $CA = CB$. ¿Cuál es la consecuencia de tal suposición? ¿Es eso posible, según el supuesto?

4. El ángulo formado por dos perpendiculares á los lados de un ángulo agudo es obtuso.

Supóngase primero que el ángulo es recto, y luégo que es agudo, y demuéstrese que ambas hipótesis conducen a resultados absurdos.

5. Uno de los ángulos de la base de un triángulo isósceles es $\frac{5}{9}$ de un recto. Demuéstrese que el triángulo no puede ser un triángulo rectángulo.

Supóngase que el ángulo desigual es recto, y véase luégo cuál es la consecuencia

158. Instrucciones generales sobre las demostraciones. Las instrucciones generales siguientes pueden servir de guía:

1) *Dibújense las figuras con la mayor exactitud posible.*

Esto ayuda mucho, sobre todo al principio. Cuando una figura está mal dibujada, la demostración se hace a veces muy difícil.

2) *Dése a las figuras la forma más general posible.*

Si, por ejemplo, se trata de investigar propiedades comunes a todos los triángulos, tómese un triángulo escaleno; pues si se escoge uno isósceles o equilátero, puede caerse en el error de creer que cuanto se aplica a éstos se aplica igualmente a otros triángulos, lo cual no es cierto.

3) *Después de dibujar la figura, indíquese con precisión qué es lo que se da o supone, y qué es lo que ha de demostrarse.*

Muchas demostraciones se dificultan a causa de que el alumno no hace esta distinción con toda claridad.

4) *Empréndase entonces la demostración por el método sintético, si se puede. Si no, pruébese el analítico, diciendo que la proposición es cierta si tal o cual lo es, y que ésta lo es si otra lo es, y así sucesivamente hasta llegar a una ya demostrada.*

5) *Si hay que demostrar la igualdad de dos rectas, trátese de demostrar que son lados homólogos de triángulos iguales, o lados de un triángulo isósceles, o lados opuestos de un paralelogramo, o segmentos comprendidos entre paralelas equidistantes.*

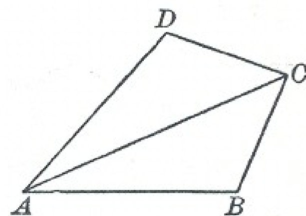
6) *Si hay que demostrar la igualdad de dos ángulos, trátese de demostrar que son ángulos alternos-internos o correspondientes formados por paralelas, u homólogos de triángulos iguales, o adyacentes a la base de un triángulo isósceles, u opuestos de un paralelogramo, o complementos o suplementos de un mismo ángulo.*

7) *Si hay que demostrar que un ángulo es mayor que otro, véase si es ángulo externo de un triángulo, o si es opuesto a mayor lado que el otro ángulo.*

8) *Para demostrar que una recta es mayor que otra, véase si se opone a mayor ángulo en un triángulo, o si es una oblicua cuyo pie dista más que el de la otra del pie de la perpendicular.*

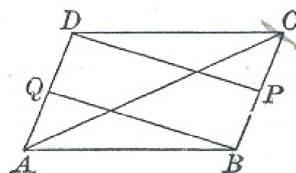
EJERCICIO 19

Demuéstrense las siguientes proposiciones relativas a rectas iguales:

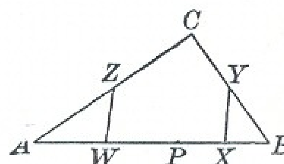


1. Si los lados AB, AD de un cuadrilátero $ABCD$ son iguales, y si la diagonal AC es la bisectriz del ángulo A, los lados BC, DC son iguales.

2. Trácese una recta entre dos paralelas. Por su punto medio trácese otra, limitada por las mismas paralelas. Demuéstrese que la segunda queda también bisectada.



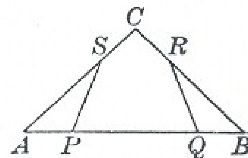
3. En un paralelogramo $ABCD$, Q es el punto medio de AD, y P el de BC. Demuéstrese que BQ y DP trisectan AC.



4. Sobre el lado AB de un triángulo ABC se toma un punto cualquiera P. Luégo se hacen $AW = WP$, $PX = XB$, $AZ = ZC$, $BY = YC$. Demuéstrese que $XY = WZ$.

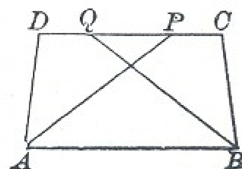
5. Demuéstrese que en todo triángulo isósceles las medianas de los lados iguales son iguales.

6. En un cuadrado $ABCD$, Q es el punto medio de CD, y P y R se toman en AB de suerte que $AP = BR$. Demuéstrese que $PQ = RQ$.



7. En esta figura, $AC = BC$, y AP, BQ, CR y CS son iguales. Demuéstrese que $QR = PS$.

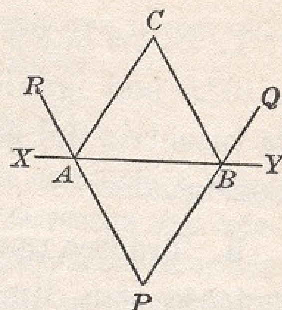
8. Del vértice y de los puntos medios de los lados iguales de un triángulo isósceles se trazan perpendiculares a la base. Demuéstrese que la dividen en cuatro partes iguales.



9. Se sabe que en el cuadrilátero $ABCD$ los lados AB y DC son paralelos y que los ángulos C y D son iguales. Si $CP = DQ$, demuéstrese que $AP = BQ$.

EJERCICIO 20

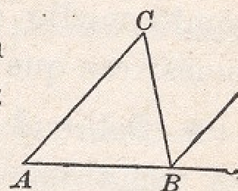
Demuéstrense las siguientes proposiciones relativas a ángulos iguales:



1. En esta figura, $AC = BC$, y BQ y AR bisectan los ángulos CBY y CAX respectivamente. Demuéstrese que el triángulo APB es isósceles.

2. Si por los vértices de un triángulo isósceles se trazan paralelas a los lados opuestos, el triángulo que forman es isósceles.

3. Si dos triángulos isósceles tienen común el ángulo desigual, las bases o coinciden o son paralelas.

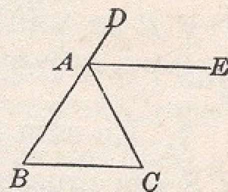


4. ¿En qué dirección debe prolongarse un lado de un triángulo para que corte la bisectriz del ángulo externo opuesto?

Examínense los casos $A > C$, $A = C$, $A < C$.

5. Las bisectrices de los ángulos iguales de un triángulo isósceles forman con la base otro triángulo isósceles.

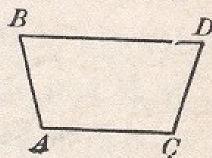
6. Las bisectrices de dos ángulos de un triángulo equilátero forman entre sí un ángulo igual a cualquiera de los ángulos externos del triángulo.



7. Si la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo es paralela al lado opuesto, el triángulo es isósceles.

8. Toda recta paralela al lado desigual de un triángulo isósceles forma ángulos iguales con los otros dos.

9. En un triángulo isósceles ABC se traza una perpendicular a la base AB. La perpendicular encuentra el lado AC en P, y la prolongación de BC en Q. Demuéstrese que el triángulo PCQ es isósceles.



10. En esta figura, $AB = CD$, y $\angle A = \angle C$. Demuéstrese que BD es paralela a AC

EJERCICIO 21

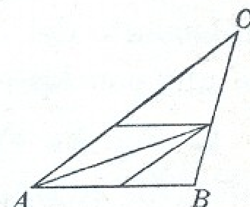
Demuéstrense las siguientes proposiciones demostrando la igualdad de dos triángulos:

1. La perpendicular a la bisectriz de un ángulo forma con los lados un triángulo isósceles.

2. Si dos perpendiculares se bisectan entre sí, todo punto de una cualquiera de ellas equidista de los extremos de la otra.

3. De B se traza una perpendicular a la bisectriz del ángulo A del triángulo ABC. Sean X su pie, e Y el punto en que BX encuentra AC o su prolongación. Demuéstrese que $BX = XY$.

4. Si por un punto equidistante de dos paralelas se trazan dos rectas, los segmentos que determinan en las dos paralelas son iguales.



5. Si del punto en que la bisectriz de un ángulo de un triángulo encuentra el lado opuesto se trazan paralelas a los otros dos lados, limitadas por los lados del triángulo, estas paralelas son iguales.

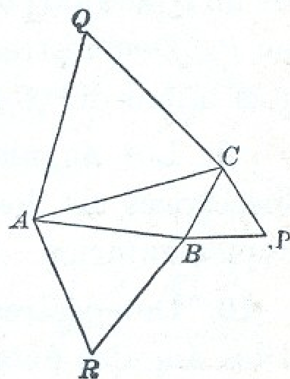
6. Las diagonales de un cuadrado son perpendiculares entre sí y bisectan los ángulos del cuadrado.

7. Si de uno de los vértices de un cuadrado se trazan rectas a los puntos medios de los lados del ángulo opuesto, estas rectas son iguales.

8. Si una diagonal de un paralelogramo bisecta uno de los ángulos, el paralelogramo es un rombo.

9. Sobre los lados de un triángulo ABC se construyen los triángulos equiláteros BPC, CQA, ARB. Demuéstrese que las rectas AP, BQ, CR son iguales.

¿Cómo puede demostrarse la igualdad de los ⩓ ABP y RBC, y la de los ⩓ ARC y ABQ? ¿Queda con esto demostrado el teorema?



EJERCICIO 22

Demuéstrense las siguientes proposiciones relativas a la suma de los ángulos de un polígono :

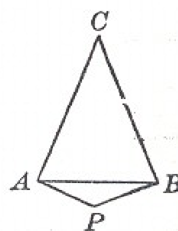
1. Ningún ángulo externo de un triángulo rectángulo ni de uno acutángulo puede ser agudo.

2. Si la suma de dos ángulos de un triángulo es igual al tercero, el triángulo es rectángulo.

3. Si la recta que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto divide el triángulo en dos triángulos isósceles, el triángulo es rectángulo.

4. Si el ángulo desigual de un triángulo isósceles es el suplemento del de otro triángulo isósceles, los ángulos iguales del uno son los complementos de los del otro.

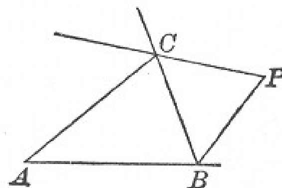
5. Por los extremos del lado AB de un triángulo ABC se trazan perpendiculares a los otros dos lados. Demuéstrese que el ángulo P formado por ellas es el suplemento del C.



6. Si dos lados de un cuadrilátero son iguales y los otros dos lados son iguales pero no paralelos, la suma de dos ángulos opuestos es igual a la suma de los otros dos.

7. Las bisectrices de dos ángulos consecutivos de un paralelogramo se cortan en ángulo recto.

8. Las bisectrices de dos ángulos externos de un triángulo cualquiera ABC se encuentran en P. Demuéstrese que la suma del ángulo P y la mitad del A es igual a un recto.



9. Los ángulos opuestos del cuadrilátero formado por las bisectrices de los ángulos de un cuadrilátero cualquiera son suplementarios.

10. Demuéstrese que el teorema anterior se aplica también a los ángulos externos del cuadrilátero.

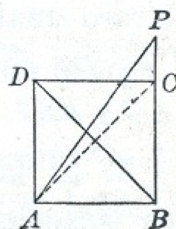
EJERCICIO 23

Demuéstrense las siguientes proposiciones relativas a la desigualdad de rectas y ángulos:

1. La bisectriz del ángulo A del triángulo ABC encuentra el lado BC en D. Demuéstrese que BA es mayor que BD, y CA mayor que CD.

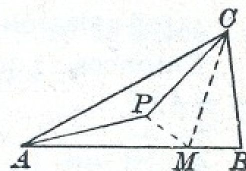
2. Sábese que en cierto cuadrilátero $ABCD$, AD es el lado mayor y BC el menor. Demuéstrese que el ángulo B es mayor que el ángulo D, y que el ángulo C es mayor que el ángulo A.

3. Si el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado, y P un punto de la prolongación de BC, demuéstrese que AP es mayor que la diagonal DB.



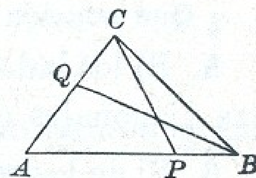
4. Si se aumenta uno de los ángulos de un paralelogramo sin alterar la longitud de los lados, la diagonal que pasa por el vértice de ese ángulo se disminuye.

5. En el interior de un triángulo ABC se toma un punto P tal que $CP = CB$. Demuéstrese que AB es mayor que AP.



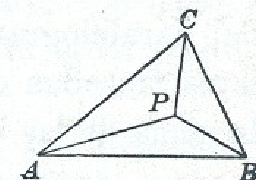
6. Sábese que en cierto cuadrilátero $ABCD$ los lados AD y BC son iguales, y que el ángulo C es menor que el D. Demuéstrese que la diagonal AC es mayor que la BD.

7. Sábese que en cierto cuadrilátero $ABCD$ los lados AD y BC son iguales, y que el ángulo D es mayor que el C. Demuéstrese que el ángulo B es mayor que el A.



8. En el triángulo ABC, el lado AB es mayor que el AC. Si $BP = CQ$, demuéstrese que BQ es mayor que CP.

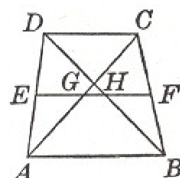
9. La suma de las distancias de un punto cualquiera a los tres vértices de un triángulo es mayor que la semisuma de los lados.



EJERCICIO 24

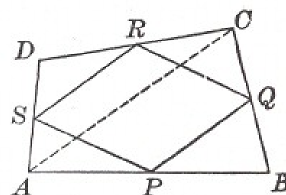
Demuéstrense los siguientes teoremas:

1. La recta que une los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio pasa por los puntos medios de las diagonales. ¿Qué relación hay entre EF y las bases AB, DC?



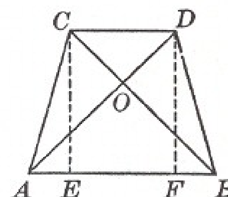
Puesto que EF bisecta BC y AD, ¿cómo divide AC y BD?

2. Las rectas que unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera forman un paralelogramo.



¿Qué relación existe entre AC y PQ, y entre AC y RS?

3. Si las diagonales de un trapecio son iguales, el trapecio es isósceles.

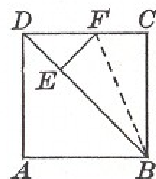


Trácense CE y DF $\perp$s a AB. ¿Qué relación existe entre los $\triangle$s ADF y BCE?

¿Qué relación existe entre los $\angle$s FAD y CBE?

Entonces, ¿qué relación existe entre los $\triangle$s ABC y BAD?

4. Si en la diagonal BD de un cuadrado $ABCD$ se toma BE igual a BC, y se traza EF perpendicular a BD, se tendrá: $DE = EF = FC$.

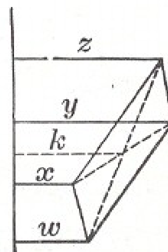


¿Cuántos grados tienen los ángulos EDF y DFE? ¿Qué relación existe entre DE y EF?

¿Qué relación existe entre los $\triangle$s BEF y BCF?

5. Si los lados opuestos de un exágono son iguales y paralelos, las diagonales que unen los vértices opuestos son concurrentes.

6. Si de los vértices de un paralelogramo se trazan perpendiculares a una recta cualquiera situada fuera del paralelogramo, la suma de las dos perpendiculares trazadas de dos vértices opuestos es igual a la suma de las otras dos.



¿Qué relación existe entre k y $x + y$, y entre k y $w + z$?

EJERCICIO 25

CUESTIONARIO DE EXAMEN

1. En todo cuadrilátero, la suma de los cuatro lados es mayor que la suma de las diagonales.

2. Las rectas que unen consecutivamente los puntos medios de los lados de un cuadrado forman otro cuadrado.

3. En todo cuadrilátero, el ángulo formado por las bisectrices de dos ángulos consecutivos es igual a la semisuma de los otros dos ángulos.

4. Si los lados opuestos de un exágono son iguales, ¿se sigue de ahí que son paralelos?

5. En un triángulo ABC, P y Q son los puntos medios de BC y AB respectivamente. AP se prolonga hasta R, y CQ hasta S, de suerte que $AP = PR$, y $CQ = QS$. Demuéstrese que S, B y R están en línea recta.

6. Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, el paralelogramo es un rectángulo.

7. En el triángulo ABC, $\angle A = 60°$, y $\angle B > \angle C$. ¿Cuál es el mayor lado del triángulo, y cuál el menor?

8. ¿Cuántos lados tiene un polígono cuyos ángulos internos son de 175° cada uno?

9. En cierto cuadrilátero $ABCD$, $AB = AD$, y $BC = CD$. Demuéstrese que la diagonal AC bisecta el ángulo DCB y es perpendicular a la diagonal BD.

10. ¿De cuántas maneras se puede formar un paralelogramo con dos triángulos iguales? Dibújense las figuras.

11. Los lados de un polígono de número impar de lados se prolongan para formar una estrella. ¿A qué es igual la suma de los ángulos internos de la estrella?

Es bueno que en todas las cuestiones anteriores el alumno dibuje esmeradamente las figuras por medio de la regla y el compás.

EJERCICIO 26

CUESTIONARIO DE REPASO

1. Defínanse las figuras rectilíneas y curvilíneas, y dénse ejemplos.

2. ¿Qué son bisectriz y perpendicular bisectriz?

3. Defínase la perpendicular, y enúnciense tres propiedades relativas a la perpendicular a una recta cualquiera.

4. Nómbrense y defínanse las partes de un triángulo y las rectas más importantes que hasta ahora han figurado en el estudio de los triángulos.

5. ¿Cómo se clasifican los ángulos?

6. ¿Cómo se clasifican los triángulos: *a*) según los ángulos; *b*) según los lados?

7. Defínanse los ángulos adyacentes, complementarios y suplementarios, y dénse ejemplos.

8. ¿Cómo se llaman las dos clases de proposiciones que se admiten sin demostración? Pónganse ejemplos.

9. Enúnciense todos los casos de igualdad de dos triángulos.

10. ¿Qué es la recíproca de una proposición?

11. Si tres partes de un triángulo son respectivamente iguales a tres partes de otro, ¿se sigue de ahí que los dos triángulos son iguales?

12. Explíquense tres maneras de determinar si una recta es paralela a otra.

13. Enúnciese el teorema relativo a la suma de los ángulos de un triángulo, y algún otro que pueda demostrarse por medio de él.

14. Enúnciense algunos teoremas relativos a ángulos y lados desiguales de un triángulo.

15. ¿Cómo se clasifican los polígonos?

16. Defínase el lugar geométrico y pónganse ejemplos.

LIBRO II

EL CÍRCULO

159. Definición de círculo. Llámase *círculo* una figura plana limitada por una curva cerrada cuyos puntos equidistan de un punto interior llamado *centro.* (Véase el n.° 29.)

160. Circunferencia. Como queda dicho, la *circunferencia* de un círculo es la curva que lo limita. *Es el lugar geométrico de todos los puntos de un plano equidistantes de un punto fijo del plano* — el centro.

161. Radio. Llámase *radio* toda recta que va del centro a la circunferencia.

162. Igualdad de los radios. *Todos los radios de un círculo son iguales. Dos círculos son iguales si sus radios lo son.*

163. Diámetro. Llámase *diámetro* toda recta que pasa por el centro y termina en puntos opuestos de la circunferencia.

Puesto que el diámetro es el doble del radio, *todos los diámetros de un círculo o de círculos iguales son iguales.*

164. Arco. Llámase *arco* toda parte de la circunferencia.

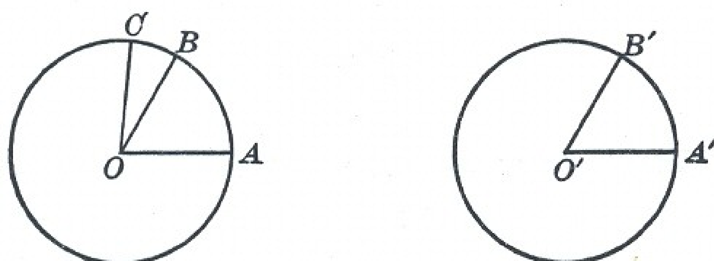
Llámase *semicircunferencia* o *semicírculo* la mitad de la circunferencia; y *cuadrante*, la cuarta parte tanto del círculo como de la circunferencia.

165. Ángulo central. Con respecto a un círculo cualquiera, *ángulo central* es todo ángulo cuyo vértice está en el centro del círculo.

Dícese que un ángulo central es *subtendido* por el arco de círculo comprendido entre sus lados, y que éstos *interceptan* ese arco.

PROPOSICIÓN I. TEOREMA

166. *En un mismo círculo o en círculos iguales, ángulos centrales iguales interceptan arcos iguales; y el mayor de dos ángulos desiguales intercepta mayor arco.*



Sean O y O' los centros de dos círculos iguales, y supóngase que los ángulos AOB, $A'O'B'$ son iguales, y que el ángulo AOC es mayor que el $A'O'B'$.

Demostrar: 1.° *que arco* $AB =$ *arco* $A'B'$,

2.° *que arco* $AC >$ *arco* $A'B'$.

Demostración. 1.° Colóquese el círculo O sobre el O' de suerte que el $\angle AOB$ coincida con su igual $A'O'B'$. Si se trata de dos ángulos de un mismo círculo, hágase girar el $\angle AOB$ hasta que coincida con su igual.

Puesto que los radios son iguales, el punto A caerá sobre el A', y el B sobre el B'.

$\therefore$ arco AB coincidirá con arco $A'B'$. N.° 159

2.° Se tiene, por hipótesis:

$$\angle AOC > \angle A'O'B',$$

$$\angle AOB = \angle A'O'B';$$

$\therefore \angle AOC > \angle AOB$; N.° 52, 8.°

$\therefore$ OC está fuera del $\angle AOB$;

$\therefore$ arco $AC >$ arco AB, N.° 52, 10.°

y por tanto, puesto que arco $AB =$ arco $A'B'$,

arco $AC >$ arco $A'B'$ (n.° 52, 8.°). L. C. D. D.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA

167. *En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales subtienden ángulos centrales iguales; y el mayor de dos arcos desiguales subtiende mayor ángulo central que el menor.*

Sean *O* y *O'* dos círculos iguales en que los arcos *AB*, *A'B'* son iguales y el arco *AC* es mayor que el *A'B'*.

Demostrar: 1.° *que* $\angle AOB = \angle A'O'B'$,
2.° *que* $\angle AOC > \angle A'O'B'$.

Demostración. 1.° Colóquese el círculo O sobre el O' de suerte que OA coincida con $O'A'$, y el arco AB con el $A'B'$.

Entonces OB coincidirá con $O'B'$; N.° 53, 1.°

$\therefore \angle AOB = \angle A'O'B'$. N.° 23

2.° Puesto que el arco AC es mayor que el $A'B'$, es mayor que AB $(= A'B')$, y OB se halla dentro del ángulo AOC.

$\therefore \angle AOC > \angle AOB$. N.° 52, 10.°

$\therefore \angle AOC > \angle A'O'B'$ (n.° 52, 8.°) L.C.D.D.

168. Teorema de las recíprocas. *Si, dadas cuatro cantidades* a, b, x, y, *se tiene:*

1) a > b *cuando* x > y,
2) a = b *cuando* x = y,
3) a < b *cuando* x < y,

las recíprocas de estas proposiciones son verdaderas.

En efecto, cuando $a > b$, la ecuacion $x = y$ es imposible, pues entonces a sería igual a b, según 2); ni puede x ser menor que y, pues entonces a sería menor que b, según 3). Luego $x > y$ cuando $a > b$.

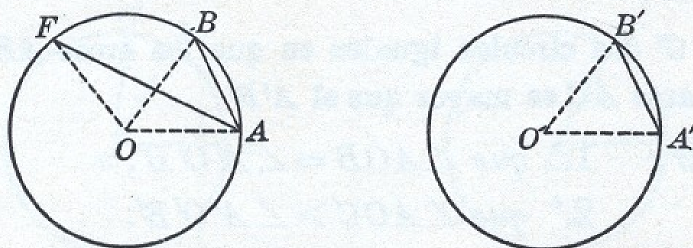
169. Cuerda. Llámase *cuerda* toda recta que une los extremos de un arco.



Dícese que este arco es *subtendido* por la cuerda. Toda cuerda subtiende dos arcos, de los cuales el menor es el de que generalmente se trata.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA

170. *En un mismo círculo o en círculos iguales, arcos iguales son subtendidos por cuerdas iguales, y el mayor de dos arcos desiguales es subtendido por mayor cuerda.*



Sean O y O' dos círculos iguales, y supóngase que los arcos AB, $A'B'$ son iguales, y que el arco AF es mayor que el $A'B'$.

Demostrar: 1.° *que cuerda* $AB =$ *cuerda* $A'B'$,

2.° *que cuerda* $AF >$ *cuerda* $A'B'$.

Demostración. 1.° Trácense OA, OB, OF en el círculo O, y $O'A'$, $O'B'$ en el O'.

Tiénese: $OA = O'A'$, y $OB = O'B'$, N.° 162

y también $\angle AOB = \angle A'O'B'$. N.° 167

(*En círculos iguales, arcos iguales subtienden ángulos iguales.*)

Síguese que $\triangle OAB = \triangle O'A'B'$, N.° 68

y por tanto cuerda $AB =$ cuerda $A'B'$. N.° 67

2.° En los $\triangle\triangle$ OAF, $O'A'B'$,

$OA = O'A'$, $OF = O'B'$. N.° 162

Ahora bien,

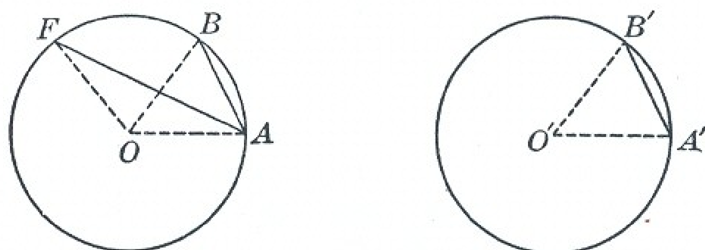
$\angle AOF > \angle A'O'B'$. N.° 167

$\therefore$ cuerda $AF >$ cuerda $A'B'$ (n.° 115). L.C.D.D.

171. COROLARIO. *En un mismo círculo o en círculos iguales, el mayor de dos arcos mayores es subtendido por menor cuerda que el menor.*

Proposición IV. Teorema

172. *En un mismo círculo o en círculos iguales, cuerdas iguales subtienden arcos iguales, y la mayor de dos cuerdas desiguales subtiende el mayor arco.*



Sean O y O' los centros de dos círculos iguales en que las cuerdas AB, $A'B'$ son iguales y la AF es mayor que la $A'B'$.

Demostrar: 1.° *que arco* $AB =$ *arco* $A'B'$,

2.° *que arco* $AF >$ *arco* $A'B'$.

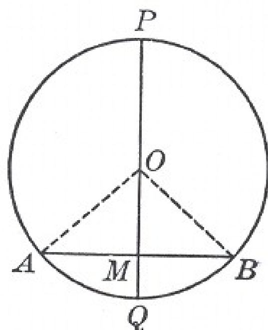
Demostración. 1.° Trácense OA, OB, OF, $O'A'$, $O'B'$.

Puesto que	$OA = O'A'$, y $OB = O'B'$,	N.° 162
y también	cuerda $AB =$ cuerda $A'B'$,	Por hipót
síguese que	$\triangle OAB = \triangle O'A'B'$,	N.° 80
	$\angle AOB = \angle A'O'B'$.	N.° 67
	$\therefore$ arco $AB =$ arco $A'B'$.	N.° 166
2.° Se tiene:	$OA = O'A'$, $OF = O'B'$.	N.° 162
Ahora bien,		
	cuerda $AF >$ cuerda $A'B'$;	Por hipót.
	$\therefore \angle AOF > \angle A'O'B'$.	N.° 116
	$\therefore$ arco $AF >$ arco $A'B'$ (n.° 166).	L. C. D. D.

173. Corolario. *En un mismo círculo o en círculos iguales, la mayor de dos cuerdas desiguales subtiende menor arco mayor que la menor.*

Proposición V. Teorema

174. *La perpendicular trazada por el centro de un círculo a una cuerda bisecta la cuerda y los arcos subtendidos.*



Sea PQ una perpendicular trazada por el centro O de un círculo $AQBP$ a la cuerda AB.

Demostrar que $AM = BM$, arco $AQ =$ arco BQ, y arco AP $=$ arco BP.

Demostración. Trácense los radios OA, OB.

Puesto que $OM = OM$, y $OA = OP$,

síguese que $\triangle AMO = \triangle BMO$, N.° 89

y por tanto $AM = BM$, $\angle AOQ = \angle BOQ$. N.° 67

Asímismo, $\angle AOP = \angle BOP$. N.° 58

$\therefore$ arco $AQ =$ arco BQ, y arco $AP =$ arco BP (n.° 166). L.C.D.D.

175. Corolario 1.° *Todo diámetro bisecta la circunferencia.*

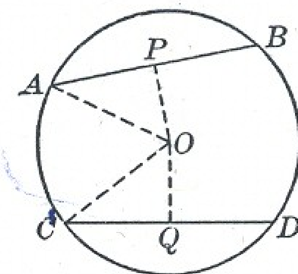
176. Corolario 2.° *Toda recta que pasa por el centro y que bisecta una cuerda es perpendicular a esa cuerda.*

177. Corolario 3.° *La perpendicular bisectriz de una cuerda pasa por el centro del círculo y bisecta los arcos que la cuerda subtiende.*

¿Cómo se llama la suma de los arcos QB y BP?

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA

178. *En un mismo círculo o en círculos iguales, las cuerdas iguales equidistan del centro, y recíprocamente, las cuerdas equidistantes del centro son iguales.*



1.° Sean AB, CD dos cuerdas iguales del círculo $ACDB$.

Demostrar que AB y CD equidistan del centro O.

Demostración. Trácense $OP \perp$ a AB, $OQ \perp$ a CD, y OA, OC.

Ahora bien, $AP = PB$, $CQ = QD$. N.° 174

Puesto que $AP = CQ$, N.° 52, 2.°

y también $OA = OC$, N.° 162

los $\triangle$ rectángulos OPA, OQC son iguales. N.° 89

$\therefore OP = OQ$. N.° 67

$\therefore AB$ y CD equidistan de O (n.° 88) L. C. D. D.

2.° Supóngase que OP y OQ son perpendiculares iguales trazadas del centro a las cuerdas AB, CD.

Demostrar que $AB = CD$.

Demostración. Puesto que

$OA = OC$, N.° 162

y también $OP = OQ$, Por hipót.

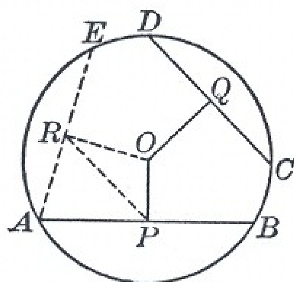
los $\triangle$ rectángulos OPA, OQC son iguales.

$\therefore AP = CQ$. N°. 67

$\therefore AB = CD$ (n°. 52, 2.°). L. C. D. D

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

179. *De dos cuerdas desiguales de un mismo círculo o de círculos iguales, la mayor dista menos del centro que la menor.*



Sean *O* el centro de un círculo, *AB* y *CD* dos cuerdas, de las cuales *AB* es la mayor, *OP* una perpendicular bajada del centro a *AB*, y *OQ* una perpendicular bajada a *CD*.

Demostrar que $OP < OQ$.

Demostración. Trácese una cuerda AE igual a CD.

Trácense $OR \perp$ a AE, y PR.

OP bisecta AB, y OR bisecta AE. N.° 174

(*La $\perp$ trazada por el centro de un $\odot$ a una cuerda bisecta la cuerda.*)

Ahora bien, $AB > CD$; Por hipót.

$\therefore AB > AE$; N.° 52, 8.°

$\therefore AP > AR$; N.° 52, 4.°

$\therefore \angle ARP > \angle RPA$. N.° 113

(*Si dos lados de un triángulo son desiguales, al mayor lado se opone mayor ángulo.*)

$\therefore \angle PRO$, complemento del $\angle ARP$,

es menor que $\angle OPR$, complemento del $\angle RPA$; N.° 59

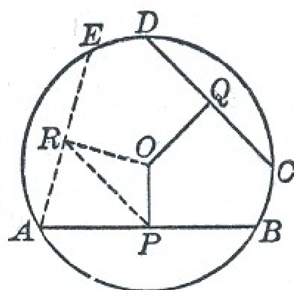
$\therefore OP < OR$.

Ahora bien, $OR = OQ$. N.° 178

$\therefore OP < OQ$. L. C. D. D

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA

180. *Si dos cuerdas de un mismo círculo o de círculos iguales no equidistan del centro, la que menos dista es mayor que la otra.*



Sean O el centro de un círculo, y AB, CD dos cuerdas, y supóngase que la perpendicular OP a AB es menor que la OQ a DC.

Demostrar que $AB > CD$.

Demostración. Trazando la cuerda AE igual a la CD, y luégo $OR \perp$ a AE, se tiene:

$OP < OQ$, Por hipót.

$OR = OQ$; N.° 178

$\therefore OP < OR$. N.° 52, 8.°

Trácese PR.

$\angle PRO < \angle OPR$; N.° 113

$\therefore \angle ARP$, complemento del $\angle PRO$, es mayor que $\angle RPA$, complemento del $\angle OPR$. N.° 59

$\therefore AP > AR$. N.° 114

Ahora bien, $AP = \frac{1}{2}AB$, y $AR = \frac{1}{2}AE$. N.° 174

$\therefore AB > AE$. N.° 52, 2.°

Además, $AE = CD$. Por constr.

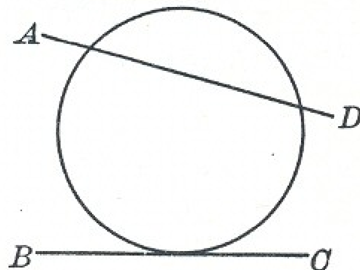
$\therefore AB > CD$. L.C.D.D.

181. COROLARIO. *El diámetro es la mayor cuerda.*

Si AB es un diámetro, AP coincide con AO, y como antes, AP (esto es, AO) $> AR$ (n.° 86).

182. Secante. Llámase *secante* de un círculo toda recta que corta la circunferencia. En esta figura, AD es una secante.

Como de un punto situado fuera de una recta no pueden trazarse a ella más de dos oblicuas de longitud dada (n.º 85), y los ángulos formados por una secante con los radios trazados por los puntos en que corta la circunferencia no pueden ser rectos (n.ºˢ 74 y 109), estos radios deben ser oblicuos, y por tanto no puede haber más de dos. Síguese que *una recta no puede cortar una circunferencia en más de dos puntos.*

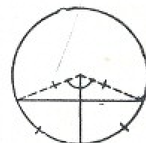


183. Tangente. Llámase *tangente* a un círculo una recta de longitud ilimitada que tiene con la circunferencia un punto común, y sólo uno.

En la figura del n.º 182, BC es tangente al círculo, y éste a su vez es tangente a BC. El punto común a una circunferencia y su tangente se llama *punto de contacto* y también *punto de tangencia.*

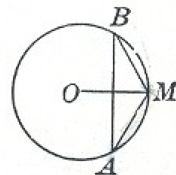
Cuando se habla de la tangente trazada a un círculo de un punto exterior, se entiende el segmento de recta comprendido entre ese punto y el de tangencia.

EJERCICIO 27

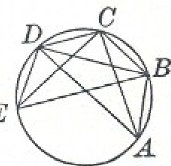


1. Si un radio bisecta un arco, bisecta también la cuerda que lo subtiende, y es perpendicular a ella.

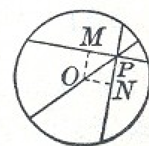
2. Un punto P de una circunferencia equidista de dos radios OA, OB. Demuéstrese que P bisecta el arco AB.



3. Las cuerdas AM y MB de este círculo son iguales. Demuéstrese que M bisecta el arco AB y que el radio OM bisecta la cuerda AB.



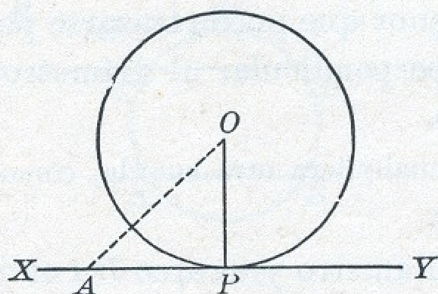
4. Demuéstrese que si las cuerdas AB, BC, CD, DE son iguales, también lo son las cuerdas AC, BD, CE, así como las AD y BE.



5. Si dos cuerdas que se cortan forman ángulos iguales con el diámetro que pasa por su punto de intersección, las dos cuerdas son iguales.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA

184. *Si una recta es perpendicular a un radio en la extremidad del radio, la recta es tangente al círculo.*



Sea XY una recta perpendicular al radio OP en P.

Demostrar que XY es tangente al círculo.

Demostración. Sea A otro punto cualquiera de XY. Trácese la recta OA.

Puesto que $OA > OP$, N.º 86

A está fuera del círculo. N.º 160

Así, P es el único punto común a XY y el círculo.

Luego PY es tangente al círculo (n.º 183). L. C. D. D.

185. CoROLARIO 1.º *Toda tangente a un círculo es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.*

En efecto, OP es la menor recta de O a XY (n.º 86).

186. COROLARIO 2.º *La perpendicular a una tangente en el punto de contacto pasa por el centro del círculo.*

Porque el radio es perpendicular a la tangente en el punto de contacto, y por un punto de una recta no puede pasar más de una perpendicular a esa recta.

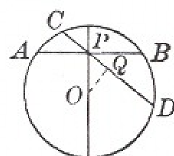
187. COROLARIO 3.º *La perpendicular bajada del centro de un círculo a una tangente pasa por el punto de contacto.*

¿Cómo se aplica aquí el teorema del n.º 86?

188. Círculos concéntricos. Dícese que dos o más círculos son *concéntricos* cuando tienen un mismo centro.

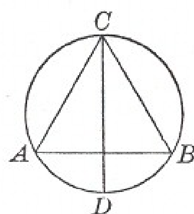
EJERCICIO 28

1. La cuerda menor que puede trazarse por un punto interior a un círculo es la perpendicular al diámetro que pasa por ese punto.



Demuéstrese que cualquiera otra cuerda, como CD, dista menos de O.

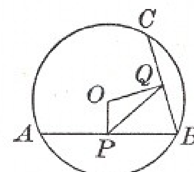
2. Si CD es un diámetro y el arco DA es igual al DB, demuéstrese que $\angle CBA = \angle BAC$.



¿Qué clase de triángulo es ABC?

3. Dos tangentes que pasan por los extremos de un diámetro son paralelas.

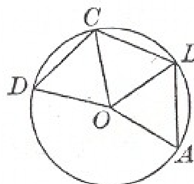
4. El arco AB es mayor que el BC; OP, OQ son perpendiculares trazadas del centro a AB y BC. Demuéstrese que $\angle QPO > \angle OQP$.



5. ¿Cuál es el lugar geométrico del centro de un círculo tangente a una recta dada XY en un punto dado P?

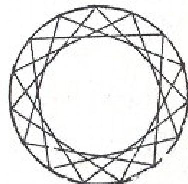
6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de todas las cuerdas de un círculo dado paralelas a una recta dada?

7. Si se trazan las cuerdas iguales AB, BC, CD, y los radios OA, OB, OC, OD, demuéstrese que $\angle AOC = \angle BOD$.



8. Demuéstrese que todas las cuerdas iguales de un círculo son tangentes a un círculo concéntrico al primero.

9. Si en un círculo se trazan cuerdas iguales en gran número, la figura interior que determinan se asemeja mucho a un círculo, según se ve aquí. Explíquese la razón de esto.



PROPOSICIÓN X. TEOREMA

189. *En todo círculo, dos paralelas interceptan arcos iguales.*

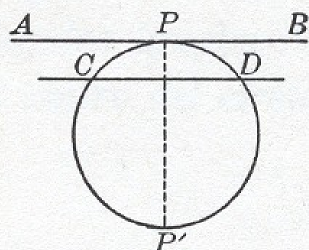


FIG. 1

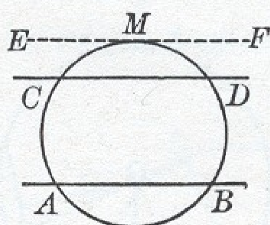


FIG. 2

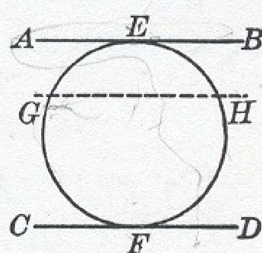


FIG. 3

CASO 1.° *Cuando una de las paralelas es una tangente y la otra es una secante.*

Sea AB, fig. 1, tangente en P al círculo y paralela a la secante CD.

Demostrar que $\quad$ *arco CP = arco DP.*

Demostración. Trácese el diámetro PP'.

PP' es $\perp$ a AB y CD. $\quad$ N.ºs 185, 97

$\therefore$ arco CP = arco DP. $\quad$ N.° 174

CASO 2.° *Cuando las dos paralelas son secantes.*

Sean AB, CD, fig. 2, secantes paralelas.

Demostrar que $\quad$ *arco AC = arco BD.*

Demostración. Sea EF una tangente paralela a CD.

Según el caso 1.°, arco AM = arco BM, arco CM = arco DM.

$\therefore$ arco AC = arco BD. $\quad$ N.° 52, 1.

CASO 3.° *Cuando las dos paralelas son ambas tangentes.*

Sean AB y CD, fig. 3, paralelas tangentes en E y F al círculo.

Demostrar que $\quad$ *arco FGE = arco FHE.*

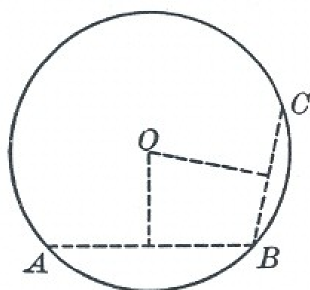
Demostración. Sea GH una secante paralela a AB y CD.

Según el caso 1.°, arco GE = arco HE, arco FG = arco FH.

$\therefore$ arco FGE = arco FHE (n.° 52, 1.°). $\quad$ L.C.D.D.

Proposición XI. Teorema

190. *Por tres puntos no situados en línea recta puede trazarse una circunferencia, y sólo una.*



Sean *A, B, C* tres puntos no situados en línea recta.

Demostrar que por A, B, C puede trazarse una circunferencia, y sólo una.

Demostración. Trácense AB y BC.

Lévantense ⊥s a estas rectas en sus puntos medios.

Puesto que AB y BC no son paralelas ni están en línea recta, las perpendiculares se encontrarán en un punto O.

Puesto que O está en la perpendicular bisectriz de AB, equidista de A y B; y puesto que está en la perpendicular bisectriz de BC, equidista de B y C. N.° 150

Luego O equidista de A, B y C.

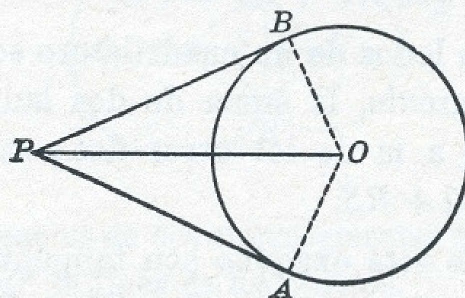
Luego una circunferencia descrita de O como centro, con radio OA, pasará por los tres puntos dados. N.° 160

El centro de toda circunferencia que pase por los tres puntos debe estar tanto en la perpendicular bisectriz de AB como en la de BC, y por tanto en su intersección; y como dos rectas no pueden cortarse en más de un punto (n.° 55), el punto O es el único que puede ser centro de una circunferencia que pase por los tres puntos dados. L. C. D. D

191. Corolario. *Dos circunferencias no pueden cortarse en más de dos puntos.*

Proposición XII. Teorema

192. *Si de un punto exterior a un círculo se trazan dos tangentes al círculo, las tangentes son iguales y forman ángulos iguales con la recta trazada del mismo punto al centro del círculo.*



Sean PA, PB dos tangentes trazadas de P al círculo O.

Demostrar que $PA = PB$, *y* $\angle APO = \angle OPB$.

Demostración. Trácense OA, OB.

PA es $\perp$ a OA, y PB es $\perp$ a OB. N.º 185

En los triángulos rectángulos PAO, PBO,

$PO = PO$, Ident.

$OA = OB$; N.º 162

$\therefore \triangle PAO = \triangle PBO$. N.º 89

$\therefore PA = PB$, y $\angle APO = \angle OPB$ (n.º 67). L. C. D. D.

193. Línea de los centros. Llámase *línea de los centros* la recta que une los centros de dos círculos.

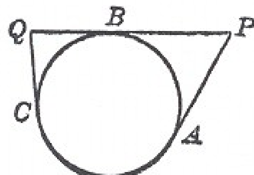
194. Círculos tangentes. Se denominan *círculos tangentes*, o *tangentes entre sí*, los que son tangentes a una misma recta en un mismo punto.

Estos términos se aplican indistintamente al círculo propiamente dicho y a la circunferencia.

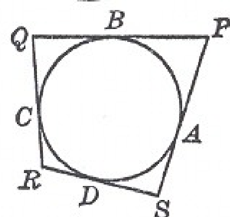
El punto común de dos círculos tangentes se llama *punto de contacto* o *punto de tangencia*. Dos círculos tangentes lo son *interiormente* cuando el uno está dentro del otro. Dos círculos tangentes lo son *exteriormente* cuando el uno está fuera del otro.

EJERCICIO 29

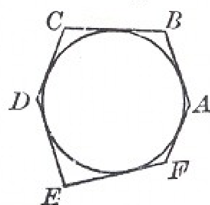
1. Demuéstrese que el razonamiento del n.° 190 no se aplica a cuatro puntos, y que por tanto no siempre es posible trazar un círculo por cuatro puntos dados.



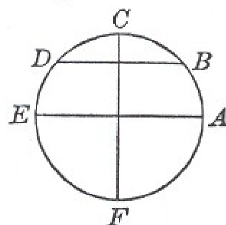
2. Si CQ, QP, PA son tangentes a este círculo, demuéstrese que $AP + QC = PQ$.



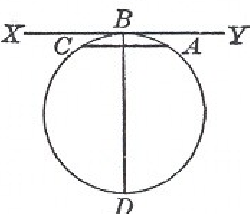
3. Si los cuatro lados de un cuadrilátero son tangentes a un círculo, la suma de dos lados opuestos es igual a la de los otros dos; esto es, $SP + QR = PQ + RS$.



4. Los lados de este exágono son tangentes a un círculo. Demuéstrese que $AB + CD + EF = BC + DE + FA$.



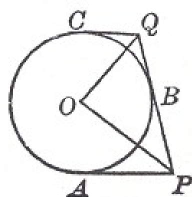
5. En esta figura, CF es un diámetro perpendicular a las cuerdas paralelas DB y EA; el arco AB es de 40°, y el arco BC es de 50°. Calcúlese el número de grados de cada uno de los arcos CD, DE, EF, FA.



6. En esta figura, XY es tangente en B al círculo, CA es perpendicular al diámetro BD, y el arco $CD = 150°$. ¿Cuántos grados tiene el arco AB?

7. Si los lados de un cuadrilátero son tangentes a un círculo, la suma de los ángulos centrales subtendidos por dos lados opuestos del cuadrilátero es igual a dos ángulos rectos.

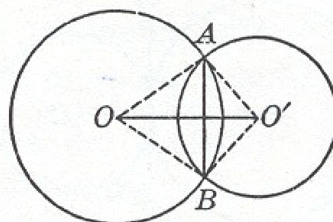
8. Las tangentes CQ, AP son paralelas, y la QP las corta en P y Q. Demuéstrese que las rectas QO y PO trazadas de Q y P al centro O del círculo se cortan en ángulo recto.



¿Están A, O y C en línea recta? Trácense OA, OC, y hállense las relaciones entre los ángulos en O y los en P y Q.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

195. *La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es la perpendicular bisectriz de la cuerda común.*



Sean O, O' los centros de dos circunferencias que se cortan, AB la cuerda común, y OO' la línea de los centros.

Demostrar que OO' es perpendicular a AB en su punto medio.

Demostración. Trácense OA, OB, $O'A$, $O'B$.

$$OA = OB, \text{ y } O'A = O'B; \qquad \text{N.° 162}$$

$\therefore$ tanto O como O' equidistan de A y B.

$\therefore$ OO' es la perpendicular bisectriz de AB (n.° 151). L.C.D.D.

196. Tangentes comunes. Una tangente común a dos círculos es *externa* si no corta la línea de los centros entre éstos; *interna*, si corta esa línea entre los centros.

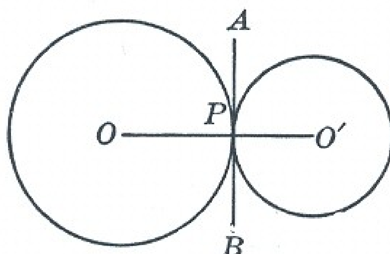
EJERCICIO 30

Descríbase la posición relativa de dos circunferencias, y trácese la figura correspondiente a cada caso, cuando la distancia entre los centros es:

1. Mayor que la suma de los radios.
2. Igual a la suma de los radios.
3. Menor que la suma y mayor que la diferencia de los radios
4. Igual a la diferencia de los radios.
5. Menor que la diferencia de los radios.

Proposición XIV. Teorema

197. *Si dos círculos son tangentes, la línea de los centros pasa por el punto de contacto.*



Sean O, O' los centros de dos círculos tangentes en P.

Demostrar que la línea de los centros pasa por P.

Demostración. Sea AB la tangente común en P. N.° 194

La $\perp$ levantada a AB en P pasa por O y O'. N.° 186

(*La $\perp$ levantada a una tangente en el punto de contacto pasa por el centro del círculo.*)

Esa perpendicular debe coincidir con la recta OO', puesto que ambas pasan por O y O'. N.° 53, 1.°

$\therefore$ P está en la línea de los centros. L.C.D.D.

EJERCICIO 31

Descríbanse las posiciones relativas de los círculos a que se refieren los ejercicios 1 a 5, y dibújense las figuras.

1. Dos círculos con cuatro tangentes comunes.

2. Dos círculos con dos tangentes externas comunes y una sola interna.

3. Dos círculos con dos tangentes externas comunes y sin tangente interna común.

4. Dos círculos con una tangente común externa y sin tangente común interna.

5. Dos círculos sin tangente común.

6. La recta que pasa por los puntos medios de dos cuerdas paralelas pasa por el centro del círculo.

7. Si dos círculos son tangentes exteriormente, las tangentes trazadas a ellos de cualquier punto de su tangente interna común son iguales.

8. Si dos círculos tangentes exteriormente son tangentes a una recta en A y B, su tangente común interna bisecta AB.

9. La recta que va del centro de un círculo al punto de intersección de dos tangentes es la perpendicular bisectriz de la cuerda que une los puntos de contacto.

10. Los diámetros de dos círculos son respectivamente 2,74 m. y 3,48 m. Hállese la distancia entre los centros : *a*) si los círculos son tangentes exteriormente ; *b*) si lo son interiormente.

11. Cada uno de tres círculos, de 4,8, 3,6 y 4,2 m. de diámetro, es tangente exteriormente a los otros dos. Hállese el perímetro del triángulo formado por las líneas de los centros.

12. Si un círculo de radio r' y cuyo centro es O rueda sobre otro de radio r, ¿cuál es el lugar geométrico de O?

13. La recta que pasa por el punto medio de una cuerda y el del arco subtendido es perpendicular a la cuerda.

14. Si dos círculos tangentes exteriormente en P son tangentes a una recta en A y B, el ángulo BPA es recto.

15. Tres círculos son tangentes exteriormente en A, B, C. Las cuerdas AB y AC prolongadas encuentran en D y E la circunferencia BC. Demuéstrese que DE es un diámetro de esta circunferencia.

16. Si dos radios perpendiculares entre sí se prolongan hasta que encuentren en A, B una tangente al círculo, las otras dos tangentes trazadas por A y B son paralelas.

17. Las dos tangentes externas comunes a dos círculos son iguales, y las dos internas también lo son.

198. Medida. Llámase *medida* de una cantidad el número que expresa las veces que esa cantidad contiene otra de la misma especie que se toma por unidad. *Medir* la cantidad es determinar ese número.

Para medir, por ejemplo, la *longitud* de un cuarto se determina cuántas veces contiene la longitud de *un metro*, que es la unidad. Para medir el *área* de un piso se determina cuántas veces contiene *un metro cuadrado*, que en este caso es la unidad de área. Para medir el *peso* de un mineral, se halla a cuántos pesos de *un kilogramo* equivale. En este caso, el kilogramo es la unidad de peso Si los resultados son, por ejemplo, 30 m., 350 m.² (metros cuadrados), 25 kg., respectivamente, estos números son las medidas de las cantidades en cuestión.

199. Razón o relación. Llámase *razón* o *relación* de dos cantidades el cociente de dividir la medida de la una por la de la otra, expresada en las mismas unidades. Dícese por brevedad que éste es el cociente de las dos cantidades.

Si, por ejemplo, un cuarto tiene 6 m. de ancho por 9 m. de largo, la relación o razón de la anchura a la longitud es 6 m. : 9 m., ó $\frac{6}{9}$, ó $\frac{2}{3}$.

La razón de a a b se escribe, o $a : b$, o bien $\frac{a}{b}$.

200. Cantidades conmensurables. Dícese que dos cantidades de una misma especie son *conmensurables entre sí*, o simplemente *conmensurables*, siempre que las dos se pueden representar por números enteros en función de una misma unidad.

Por ejemplo, 20 m. y 30 m. son conmensurables. Aquí los números enteros son 20 y 30, y la unidad común, 1 m. Asímismo, 4 m., o sea $\frac{8}{2}$ m., y $4\frac{1}{2}$ m., o sea $\frac{9}{2}$ m., son conmensurables. Los enteros son aquí 8 y 9, y la unidad común, $\frac{1}{2}$ m.

La unidad común en función de la cual se expresan dos cantidades conmensurables se llama *común medida* de ellas.

201. Cantidades inconmensurables. Dícese que dos cantidades de una misma especie son *inconmensurables* cuando no tienen medida común.

Si, por ejemplo, $a = \sqrt{2}$ y $b = 3$, a y b son inconmensurables, pues es imposible expresarlos en números enteros en función de una misma unidad.

202. Razón inconmensurable. Llámase *razón inconmensurable* la expresión del cociente de dos cantidades inconmensurables.

Aun cuando el valor de tal razón no puede expresarse con exactitud por números enteros ni fraccionarios, puede hallarse con el grado de aproximación que se quiera.

Supóngase que $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. Ahora bien, $\sqrt{2} = 1{,}41421356 \cdots$, que es mayor que 1,414213 y menor que 1,414214. Si se toma una millonésima de b por unidad de medida, el valor de $a : b$ se hallará entre 1,414213 y 1,414214, y por tanto difiere de cualquiera de estos valores en menos de una millonésima.

Llevando más lejos la aproximación de $\sqrt{2}$, la razón de a a b puede hallarse con un error menor que una billonésima, una trillonésima, o cualquiera otra fracción, por pequeña que sea.

En los cálculos prácticos se procede como si todas las cantidades fueran conmensurables; mas no así en las matemáticas puras.

Si $\frac{a}{b} > \frac{m}{n}$ pero $< \frac{m+1}{n}$, el error que se comete tomando una de estas fracciones por valor de $\frac{a}{b}$ es menor que $\frac{1}{n}$. Tomando para n un valor suficientemente grande, el error puede hacerse tan pequeño como se quiera.

EJERCICIO 32

Hállese una común medida de:

1. 32 m. y 24 m. **3.** $5\frac{1}{2}$ m. y $3\frac{1}{2}$ m. **5.** $6\frac{1}{3}$ días y $2\frac{2}{3}$ días.

2. 48 cm. y 18 cm. **4.** $2\frac{3}{4}$ kg. y $1\frac{1}{2}$ kg. **6.** 14,4 m. y 12 m.

Hállese la mayor común medida de:

7. 64 m. y 24 m. **10.** $3\frac{1}{3}$ pulg. y $\frac{1}{3}$ pulg.

8. 51 m. y 17 m. **11.** $2\frac{3}{4}$ horas y 0,25 horas.

9. 7,5 cm. y 1,25 cm. **12.** 75° y 7° 30′.

13. Si $a : b = \sqrt{3}$, determínese el valor aproximado de esta relación con un error menor que 0,001.

203. Constante y variable. Llámase *constante* toda cantidad cuyo valor permanece fijo o invariable en todo el curso de una investigación o discusión.

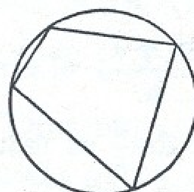
Llámase *variable* toda cantidad a que se dan diferentes valores para ciertos fines.

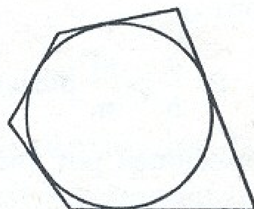
204. Límite. Cuando una variable se puede hacer variar de tal manera que se aproxime sin cesar a una constante y que la diferencia entre las dos pueda hacerse y mantenerse tan pequeña como se quiera, la constante se llama *límite* de la variable.

Hay variables que llegan a su límite; otras que no. Así, una cuerda puede hacerse crecer hasta que sea igual al diámetro, que es su límite superior, sin que deje de ser cuerda. Puede también hacerse disminuír hacia su límite inferior 0, pero no puede hacerse igual a 0 sin que deje de ser cuerda.

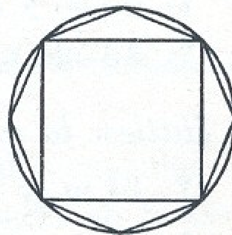
205. Polígonos inscrito y circunscrito. Un polígono es *inscrito* en un círculo cuando todos sus lados son cuerdas del círculo; y *circunscrito* a un círculo, cuando todos sus lados son tangentes al círculo.

El círculo es *inscrito* en el polígono circunscrito, y *circunscrito* al inscrito.


Polígono inscrito


Polígono circunscrito

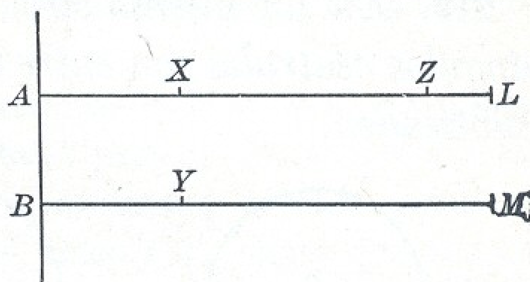
206. El círculo como límite. Si en un círculo se inscribe un cuadrado, y luégo un octógono con los vértices en los puntos medios de los cuatro arcos, el octógono es mayor que el cuadrado pero menor que el círculo, y el perímetro del octógono es mayor que el perímetro del cuadrado pero menor que la circunferencia del círculo.



Si se continúa doblando el número de lados es claro que la circunferencia es el límite del perímetro del polígono, y que asímismo el área del círculo es el límite del área del polígono.

207. Teorema de los límites. *Si dos variables tienden hacia sus límites pero permanecen siempre iguales, los límites son iguales.*

Supongamos que AX y BY crecen sin cesar y tienden hacia los límites AL y BM respectivamente, pero permaneciendo siempre iguales. Se trata de demostrar que los límites AL y BM son iguales.

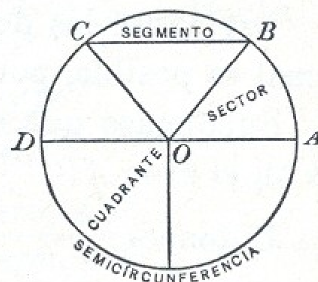


Supóngase que estos límites no son iguales, y que $AZ = BM$.

Puesto que X puede llegar a una posición intermedia entre Z y L, puede hacerse $AX > AZ$, y por tanto mayor que BM. Como BY no puede exceder BM, será también $AX > BY$, lo que es contra el supuesto. Luego no puede ser $BM < AL$. Asímismo, no puede ser $AL < BM$. Luego $AL = BM$. L.C.D.D.

208. Bisección del círculo. Es evidente que todo diámetro divide el área del círculo en dos partes iguales. Esto se expresa también diciendo que *todo diámetro divide el círculo en dos partes equivalentes.*

209. Segmento de círculo. Llámase *segmento de círculo* la parte de un círculo comprendida entre un arco y su cuerda.



Si la cuerda es un diámetro, el segmento se llama *semicírculo*, palabra que también se aplica a veces a la semicircunferencia.

210. Sector. Llámase *sector* la parte de un círculo comprendida entre un arco y los radios que van a sus extremos.

Si el arco es la cuarta parte de la circunferencia, el sector se llama *cuadrante*; si la sexta parte, *sextante*; si la octava, *octante*.

211. Ángulo inscrito. *Ángulo inscrito* es aquel cuyo vértice está en una circunferencia y cuyos lados son cuerdas. Dícese que el ángulo está inscrito en el arco que contiene el vértice.

Proposición XV. Teorema

212. *En un mismo círculo o en círculos iguales, dos ángulos centrales son entre sí como los dos arcos que los subtienden.*

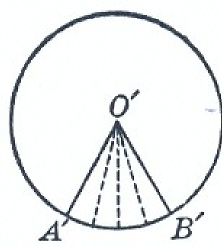


Fig. 1



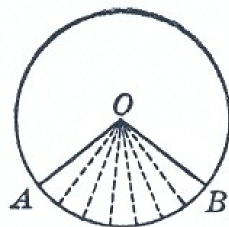


Fig. 2

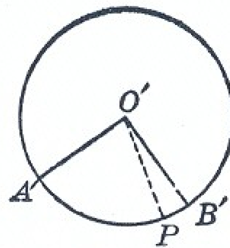


Fig. 3

Sean O, O' los centros de dos círculos iguales, y AOB, $A'O'B'$ dos ángulos, subtendidos por los arcos AB, $A'B'$ respectivamente.

Demostrar que $$\frac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} = \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } AB}.$$

Caso 1.° *Cuando los arcos son conmensurables* (figs. 1 y 2).

Demostración. Sea m una medida común de $A'B'$ y AB.

Divídanse los dos arcos $A'B'$ y AB en partes iguales a m, lo cual es posible, por ser m medida de ambos.

Supóngase que en el arco $A'B'$ hay a de estas divisiones, y b en el arco AB.

Entonces $$\frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } AB} = \frac{a}{b}.$$

Trácense radios a los puntos de división de $A'B'$ y AB.

Estos radios dividirán el ángulo AOB en b partes iguales, y el $A'O'B'$ en a partes iguales entre sí y a las de AOB. N.° 167

$$\therefore \frac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} = \frac{a}{b}.$$

$$\therefore \frac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} = \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } AB} \text{ (n.° 52, 8.°)}.$$ L.C.D.D

CASO 2.° *Cuando los arcos son inconmensurables* (figs. 2 y 3).

Demostración. Divídase AB en un número cualquiera de partes iguales, y tómense consecutivamente en $A'B'$ tantas de estas partes como sea posible.

Puesto que los arcos son inconmensurables, $A'B'$ no puede contener un número exacto de tales partes. De suerte que si, partiendo de A', se toman en $A'B'$ tantas de ellas como se pueda, habrá siempre un residuo, como PB', menor que una de las partes. Trácese $O'P$.

Puesto que AB y $A'P$ son conmensurables,

$$\frac{\angle A'O'P}{\angle AOB} = \frac{\text{arco } A'P}{\text{arco } AB}. \qquad \text{Caso 1.°}$$

Aumentando el número de partes en que AB se divide, cada parte, y por tanto PB', puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

Por tanto PB' tiende hacia 0 como límite a medida que se aumenta el número de partes; el ángulo $PO'B'$ tiende también hacia 0, el arco $A'P$ tiende hacia $A'B'$, y el ángulo $A'O'P$ hacia el $A'O'B'$.

$\therefore$ la variable $\dfrac{\text{arco } A'P}{\text{arco } AB}$ tiende hacia $\dfrac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } AB}$ como límite,

y la variable $\dfrac{\angle A'O'P}{\angle AOB}$ tiende hacia $\dfrac{\angle A'O'B'}{\angle AOB}$.

Ahora bien, $\dfrac{\angle A'O'P}{\angle AOB}$ es siempre igual a $\dfrac{\text{arco } A'P}{\text{arco } AB}$.

$$\therefore \frac{\angle A'O'B'}{\angle AOB} = \frac{\text{arco } A'B'}{\text{arco } AB} \text{ (n.° 207).} \qquad \text{L. C. D. D.}$$

213. Medida de un ángulo por un arco. Vese que el valor numérico de un ángulo central (expresado en grados por ejemplo) es igual al del arco que lo subtiende. Esto se expresa diciendo que *todo ángulo central se mide por el arco que lo subtiende,* o lo que es igual, *por el arco comprendido entre sus lados.*

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA

214. *Todo ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.*

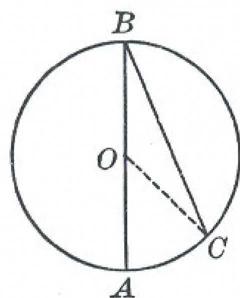


FIG. 1

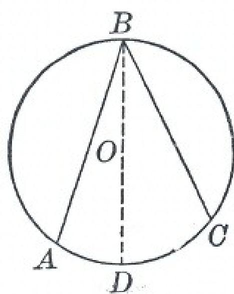


FIG. 2

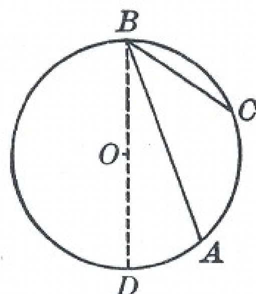


FIG. 3

Sea B un ángulo inscrito en un círculo cuyo centro es O, y sea AC el arco comprendido entre los lados del ángulo.

Demostrar que el $\angle B$ es medido por la mitad del arco AC.

CASO 1.° *Cuando O se halla sobre uno de los lados* (fig. 1).

Demostración. Trácese OC.

Ahora bien, $\angle B = \angle C$. N.° 74

Pero $\angle B + \angle C = \angle AOC$; N.° 111

$\therefore 2\angle B = \angle AOC$. N.° 52, 8.°

$\therefore \angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$. N.° 52, 2.°

El $\angle AOC$ es medido por el arco AC. N.° 213

$\therefore \angle B$ es medido por $\frac{1}{2}$ arco AC.

CASO 2.° *Cuando O se halla dentro del ángulo B* (fig. 2).

Demostración. Trácese el diámetro BD.

$\angle ABD$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco AD,

$\angle DBC$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco DC Caso 1.°

$\therefore \angle ABD + \angle DBC$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ (arco AD + arco DC)

esto es, $\angle ABC$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco AC.

CASO 3.° *Cuando O se halla fuera del ángulo B* (fig. 3).

Demostración. Trácese el diámetro BD.

$\angle DBC$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco DC,

$\angle DBA$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco DA. Caso 1.°

$\therefore \angle DBC - \angle DBA$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ (arco DC − arco DA);

esto es, $\angle ABC$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco AC. L.C.D.D

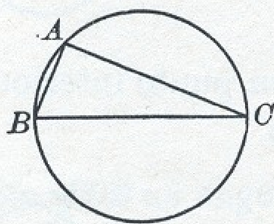


FIG. 4

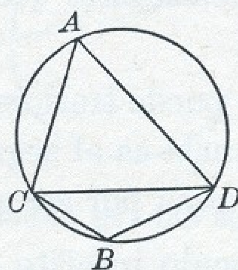


FIG. 5

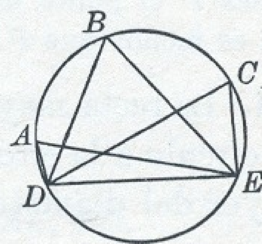


FIG. 6

215. COROLARIO 1.° *Todo ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.*

Pues tal ángulo es la mitad de un ángulo central de lados colineales. Véase la fig. 4.

216. COROLARIO 2.° *Un ángulo inscrito en un arco mayor que un semicírculo es agudo; en uno menor, obtuso.*

Véanse los ángulos A y B en la fig. 5.

217. COROLARIO 3.° *Todos los ángulos inscritos en un mismo arco o en arcos iguales son iguales.*

Dése la razón de esto. Véanse los ángulos A, B, C en la fig. 6.

218. COROLARIO 4.° *Los ángulos opuestos de todo cuadrilátero inscrito en un círculo son suplementarios; y recíprocamente, si los ángulos opuestos de un cuadrilátero son suplementarios, el cuadrilátero es inscriptible.*

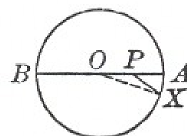
En cuanto a la recíproca, ¿se puede trazar un círculo por A, B y C (n.° 190)? Si no pasa por D, ¿puede demostrarse que D es o mayor o menor que algún otro ángulo suplementario de B? Véase el n.° 111.

EJERCICIO 33

1. Todo paralelogramo inscrito en un círculo es un rectángulo.

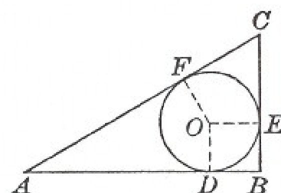
2. Todo trapecio inscrito en un círculo es isósceles.

3. La recta menor que puede trazarse de un punto interior de un círculo a la circunferencia es el segmento menor del diámetro que pasa por ese punto.



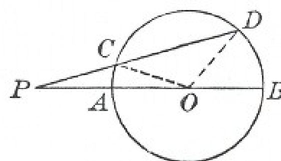
Sea P el punto dado. Demuéstrese que el segmento PA es menor que PX.

4. La recta mayor que puede trazarse de un punto interior de un círculo a la circunferencia es el segmento mayor del diámetro que pasa por ese punto.



5. El diámetro del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de los catetos menos la hipotenusa.

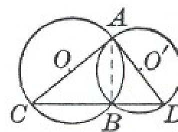
6. La menor recta que de un punto exterior puede trazarse a una circunferencia es la parte externa de la secante que pasa por el centro.



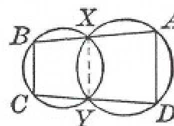
Sean P el punto, O el centro del círculo, y PA la parte externa de la secante POB. Sea PCD otra secante. Compárese $PC + CO$ con FO.

7. La mayor recta que de un punto exterior puede trazarse a una circunferencia es la secante que pasa por el centro.

8. Por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias se traza un diámetro de cada una. La recta que une los extremos de estos diámetros pasa por el otro punto de intersección.

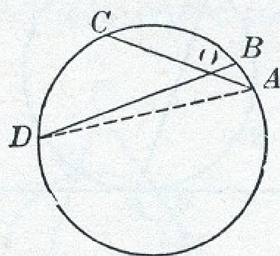


9. Si por los puntos de intersección de dos circunferencias se trazan dos rectas cualesquiera limitadas por las circunferencias, las cuerdas trazadas entre los extremos correspondientes de las dos rectas son paralelas.



Proposición XVII. Teorema

219. *El ángulo formado por dos cuerdas que se cortan dentro de un círculo tiene por medida la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados.*



Sea *AOB* un ángulo formado por las cuerdas *AC*, *BD*.

Demostrar que AOB tiene por medida $\frac{1}{2}$ *(arco AB + arco CD).*

Demostración. Trácese AD.

$$\angle AOB = \angle A + \angle D. \qquad \text{N.° 111}$$

Ahora bien, el ángulo A y el D son inscritos, y los arcos que los subtienden son CD y AB respectivamente.

$\therefore \angle A$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco CD,

y asímismo, $\angle D$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco AB. N.° 214

$\therefore \angle AOB$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ (arco AB + arco CD). L.C.D.D

Discusión. Si O coincide con el centro del círculo, ¿a qué otro teorema se reduce éste?

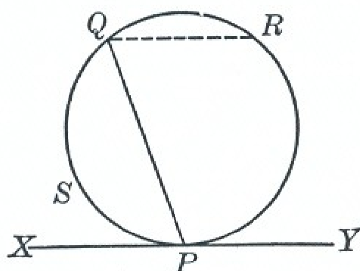
Si O es un punto de la circunferencia, como B, ¿a qué otro teorema se reduce éste?

Supóngase que el punto permanece en la posición indicada en la figura, y que AC gira sobre O hasta coincidir con BD. ¿Qué arcos miden en tal caso los ángulos AOB, COD? ¿y los ángulos BOC, DOA?

También puede demostrarse esta proposición trazando una cuerda AE paralela a BD, y demostrando que $\angle AOB = \angle A$, puesto que estos ángulos son alternos-internos de dos paralelas cortadas por una trasversal. Ahora bien, el $\angle A$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco CE. También se tiene: arco CE = arco CD + arco DE = arco CD + arco AB, puesto que arco AB = arco DE (n.° 189). Luego el $\angle AOB$, que es igual al A, tiene por medida $\frac{1}{2}$ (arco AB + arco CD).

PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA

220. *El ángulo formado por una tangente y una cuerda tiene por medida la mitad del arco subtendido por la cuerda.*



Sean XY la tangente y PQ la cuerda.

Demostrar que $\angle QPX$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco QSP.

Demostración. Trácese la cuerda QR paralela a XY.

Entonces se tendrá:

arco $PR =$ arco QSP. N.° 189

(En todo círculo, dos paralelas interceptan arcos iguales.)

También se tiene:

$\angle QPX = \angle PQR$. N.° 100

(Estos dos ángulos son alternos-internos.)

Ahora bien, $\angle PQR$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco PR. N.° 214

(Todo ángulo inscrito tiene por medida la mitad del arco comprendido entre sus lados.)

Reemplácese $\angle PQR$ por su igual $\angle QPX$,

y también arco PR por su igual QSP: N.° 52, 8.°

$\angle QPX$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco QSP. L.C.D.D.

Discusión. ¿Cuál es la medida del ángulo YPQ, suplemento del QPX?

Si PQ es perpendicular a XY, ¿cuáles son las medidas de los ángulos YPQ, QPX?

Supóngase que PQ gira alrededor de P hasta coincidir con XY. ¿Cuál será entonces la medida del $\angle YPQ$? ¿cuál la del $\angle QPX$, y a qué será igual este ángulo?

PROPOSICIÓN XIX. TEOREMA

221. *El ángulo formado por dos secantes o tangentes, o por una secante y una tangente, trazadas a un círculo de un punto exterior, tiene por medida la semidiferencia de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo.*

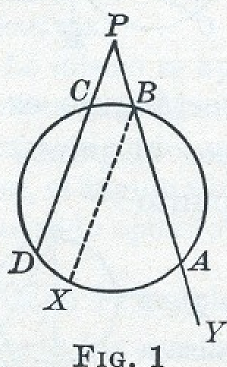


FIG. 1

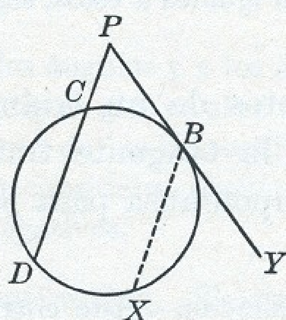


FIG. 2

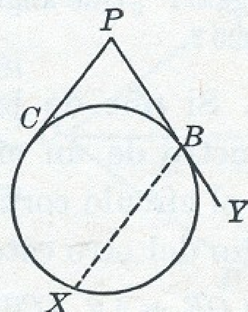


FIG. 3

Sean *PBA, PCD* dos secantes trazadas por *P*.

Demostrar que el $\angle P$ *tiene por medida* $\frac{1}{2}$(*arco* $DA-$ *arco* BC).

Demostración. Trácese $BX \parallel$ a PCD (fig. 1).

Arco $BC =$ arco DX. N.° 189

Ahora bien,

arco $XA =$ arco $DA -$ arco DX;

$\therefore$ arco $XA =$ arco $DA -$ arco BC. N.° 52, 8.°

También: $\angle P = \angle XBA$. N.° 102

$\angle XBA$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco XA. N.° 214

Reemplazando $\angle XBA$ por su igual $\angle P$,

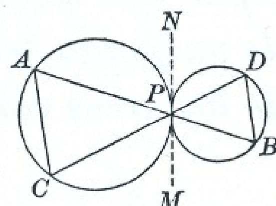
y arco XA por su igual $DA - BC$, N.° 52, 8.°

resulta que $\angle P$ tiene por medida $\frac{1}{2}$(arco $DA -$ arco BC). L.C.D.D.

Si la secante PY gira hasta hacerse tangente, toma la posición PB de la fig. 2. Si la secante PD gira de igual manera, llegará a la posición PC de la fig 3. Demuéstrese el teorema en estos dos casos especiales.

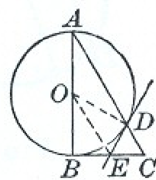
EJERCICIO 34

1. Si por el punto de contacto de dos círculos tangentes se trazan dos rectas limitadas por las circunferencias, las cuerdas determinadas por los extremos de esas rectas son paralelas.

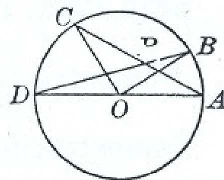


Para que esto sea cierto, ¿a qué ángulo debe el A ser igual? ¿Qué ángulos son iguales a éstos, según el n.º 220?

2. Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo es el diámetro de un círculo, la tangente trazada por el punto en que el círculo corta la hipotenusa pasa por el punto medio del otro cateto.

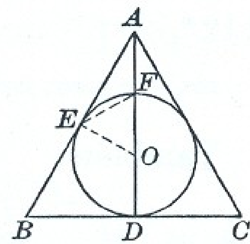


Si OE es ∥ a AC, ¿qué relación existe entre BE y EC? El teorema se reduce pues a demostrar que OE es paralela a cuál línea? Para que esto sea cierto, ¿a cuál ángulo debe ser igual el BOE?



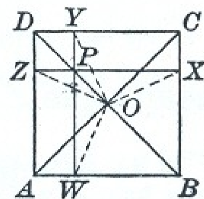
3. Si por los extremos del diámetro AD se trazan dos cuerdas AC, DB que se corten en P de suerte que $\angle APB = 45°$, el $\angle BOC$ es recto.

4. El radio del círculo inscrito en un triángulo equilátero es un tercio de la altura del triángulo.



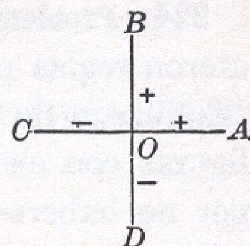
Para que esto sea cierto, ¿a cuál línea debe ser igual AF? Parece que AF sea igual a EF, y EF a OF. ¿Puede demostrarse que el $\triangle OFE$ es equilátero, o el AEF isósceles?

5. Si por cualquier punto de una diagonal de un cuadrado se trazan rectas paralelas a los lados, los puntos en que cortan los otros lados están en una circunferencia cuyo centro es el punto medio de las diagonales.



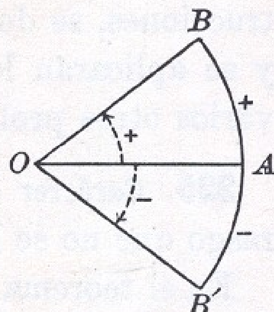
¿Cuáles ⊿ deben ser iguales para que OY lo sea a OZ? ¿Por qué lo son? ¿Cuáles ⊿ deben ser iguales para que OY lo sea a OX? ¿Cuáles para que OX lo sea a OW?

222. Cantidades positivas y negativas. En la geometría, como en el álgebra, las cantidades pueden ser *positivas* o *negativas*.



Por ejemplo, las temperaturas sobre cero se consideran positivas; las bajo cero, negativas. Análogamente, si en esta figura se consideran OA y OB como positivas, OC y OD deben considerarse como negativas.

Lo mismo se aplica a los ángulos y a los arcos. Si la recta que engendra un ángulo gira en el sentido AB, contrario al del movimiento de las manecillas de un reloj, el ángulo y el arco se consideran positivos; si en el sentido opuesto AB', negativos.



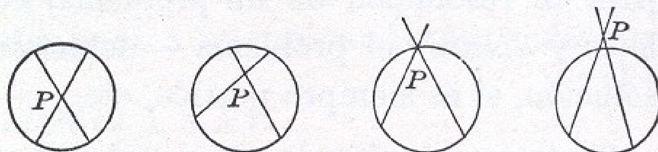
223. Principio de continuidad. Teniendo en cuenta las cantidades negativas, puede a menudo enunciarse un teorema de manera que incluya varios teoremas particulares. Sirva de ejemplo este teorema general: *El ángulo formado por dos rectas que cortan una circunferencia o son tangentes a ella tiene por medida la semisuma de los arcos comprendidos entre sus lados.*

Los siguientes son casos particulares:

1.° Si las rectas se cortan en el centro, la semisuma de los arcos es igual a uno de ellos, y el teorema se reduce al del n.° 213.

2.° Si las rectas son dos cuerdas cualesquiera, se tiene el caso del n.° 219

3.° Si el punto de intersección P se mueve hasta la circunferencia, uno de los arcos es cero, y entonces se tienen los teoremas de los n.ºs 214 y 220.



4.° Si P se mueve hasta salir del círculo, el arco menor, después de pasar por cero, se hace negativo, y entonces la suma algébrica de los arcos es en realidad su diferencia aritmética (n.° 221).

El principio en virtud del cual se emplean estas variaciones continuas para aplicar un teorema general a casos particulares se llama *principio de continuidad*.

224. Problemas de construcción. Al principio de esta obra se dieron reglas para ejecutar algunas construcciones geométricas sencillas, a fin de que el alumno se acostumbrase a dibujar sus figuras con exactitud. No se dieron demostraciones entonces, por no haberse demostrado previamente los teoremas en que tales construcciones se fundan. Ahora se repasarán esas construcciones, se demostrará la validez de los métodos empleados, y se aplicarán los mismos u otros métodos a la resolución de varios otros problemas.

225. Carácter de las resoluciones. El problema presenta un rasgo que no se halla en la demostración de un teorema.

En el teorema hay tres cosas que distinguir: 1.ª *lo que se da o supone*; 2.ª *lo que debe demostrarse*; 3.ª *la demostración.* En el problema hay cuatro: 1.ª *lo que se da o supone*; 2.ª *lo que se busca*; 3.ª *la construcción* (lo que debe hacerse para resolver el problema); 4.ª *la demostración* de que la construcción satisface las condiciones del problema.

Un teorema se *demuestra*; un problema se *resuelve* primero, y luégo la validez de la resolución se demuestra.

En la resolución de un problema las líneas dadas se hacen continuas; las auxiliares o *de construcción*, de puntos.

226. Discusión de un problema. Fuera de la marcha indicada para la resolución de un problema, conviene a veces ir más lejos y *discutir* el problema — determinar si tiene más de una solución, si es siempre posible, etc.

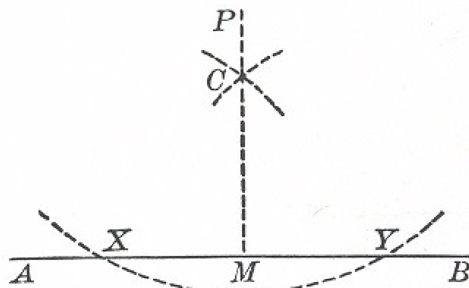
Supóngase, por ejemplo, que el problema es: *Por un punto dado trazar una tangente a un círculo dado.*

Una vez resuelto el problema, podemos discutirlo así: Si el punto dado está fuera del círculo, hay dos tangentes posibles, que son iguales (n.º 192). Si el punto está en la circunferencia, habrá sólo una tangente, pues sólo una perpendicular puede trazarse a un radio en su extremidad (n.º 184). Si el punto es interior al círculo, el problema es evidentemente imposible.

El principio de continuidad es de uso frecuente en estas discusiones.

PROPOSICIÓN XX. PROBLEMA

227. *De un punto situado fuera de una recta, bajar una perpendicular a esa recta.*



Sea *P* un punto situado fuera de la recta *AB*.

Se desea bajar de P una perpendicular a AB.

Construcción. Haciendo centro en P, y con radio suficientemente grande, descríbase un arco que corte AB en X e Y. N.º 53, 4.º

Haciendo centro primero en X y después en Y, y con un radio (que puede tomarse fácilmente a ojo) mayor que $\frac{1}{2}XY$, descríbanse dos arcos, los cuales se cortarán en un punto C. N.º 53, 4.º

Trácese PC. N.º 53, 1.º

Prolónguese PC hasta su intersección M con AB.

Entonces PM es la perpendicular buscada.

Demostración. Puesto que, por construcción, tanto P como C equidistan de X e Y, esos dos puntos determinan la perpendicular bisectriz de XY. N.º 151

$\therefore PM$ es $\perp$ a XY.

$\therefore PM$ es $\perp$ a AB. L.C.D.D.

Discusión. Las observaciones siguientes son interesantes:

Que la prolongación de PC corta la recta AB queda demostrado en el razonamiento anterior.

La distancia XY es cómoda para radio de los arcos C, aunque puede emplearse cualquiera otra mayor que $\frac{1}{2}XY$.

Si C coincide con P, tómese la intersección de los arcos debajo de AB, como se ve en la pág. 9, n.º 2 del ejercicio.

Proposición XXI. Problema

228. *En un punto dado de una recta, levantar una perpendicular a esa recta.*

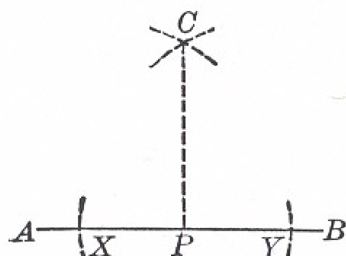


Fig. 1

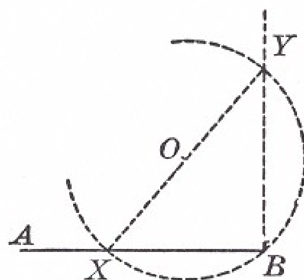


Fig. 2

Sea P el punto dado de la recta AB.

Se desea levantar una perpendicular a AB en P.

Caso 1.° *Cuando P no está en un extremo de AB* (fig. 1).

Construcción. Hágase $PX = PY$. N.° 53, 4.°

Con X e Y como centros, descríbanse dos arcos que se corten en un punto C. N.° 53, 4.°

Trácese CP. N.° 53, 1.°

CP es la perpendicular buscada.

Demostración. Tanto P como C equidistan de X e Y; luego PC es la $\perp$ bisectriz de XY (n.° 151). L.C.D.D.

Caso 2.° *Cuando P está en un extremo, como B, de AB* (fig. 2).

Construcción. Tómese un punto cualquiera O fuera de AB, y de él como centro, con radio OB, descríbase un arco que corte a AB en un punto X.

Trácese el diámetro XY.

Trácese BY, que es la perpendicular buscada.

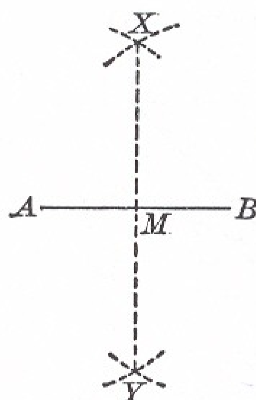
Demostración. $\angle B = 1$ rt. N.° 215

$\therefore BY$ es $\perp$ a AB (n.° 27). L.C.D.D.

Discusión. Si el círculo descrito de O como centro es tangente a AB en B, OB es la perpendicular que se busca (n.° 185).

PROPOSICIÓN XXII. PROBLEMA

229. *Dividir una recta dada en dos partes iguales.*



Sea AB la recta dada.

Se desea dividir AB en dos partes iguales.

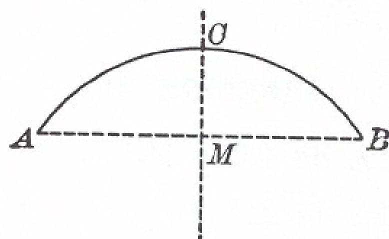
Construcción. Con centros A y B, y radio AB, descríbanse arcos que se corten en dos puntos X, Y, y trácese XY.

El punto M en que XY encuentra AB es el medio de AB.

Demostración. XY es la $\perp$ bisectriz de AB (n.° 151). L. C. D. D.

PROPOSICIÓN XXIII. PROBLEMA

230. *Dividir un arco dado en dos partes iguales.*



Sea AB el arco dado.

Se desea dividir AB en dos partes iguales.

Construcción. Trácese la cuerda AB. N.° 53, 1

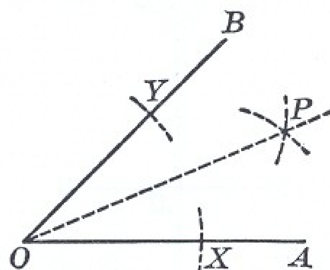
Trácese CM, $\perp$ bisectriz de la cuerda AB. N.° 229

El punto C es el medio del arco AB.

Demostración. MC bisecta el arco AB (n.° 177). L. C. D. D

PROPOSICIÓN XXIV. PROBLEMA

231. *Dividir un ángulo dado en dos partes iguales.*



Sea AOB el ángulo dado.

Se desea dividir AOB en dos partes iguales.

Construcción. Con O por centro y cualquier radio trácese un arco que corte a OA en X y a OB en Y.

De X e Y como centros, y con un radio conveniente, trácense arcos que se corten en un punto P.

OP es la bisectriz del $\angle AOB$.

Demostración. Trácense PX y PY.

Demuéstrese que $\triangle OPX = \triangle OPY$. N.° 80

Síguese de la igualdad de estos triángulos que

$\angle AOP = \angle BOP$ (n.° 67). L.C.D.D.

EJERCICIO 35

1. Construír ángulos de 45° y 135°.

2. Construír ángulos de 22° 30′ y 157° 30′.

3. Dado el lado de un triángulo equilátero, construír el triángulo, y por tanto también un ángulo de 60°.

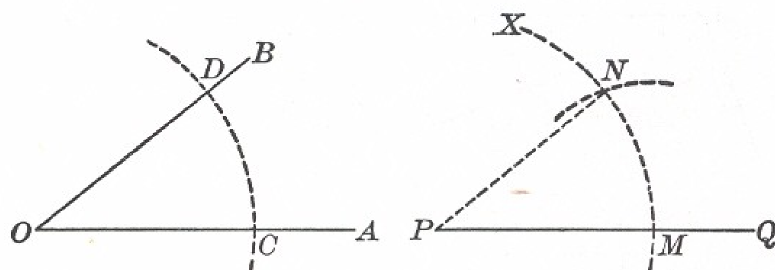
4. Construír un ángulo de 30°, o sea, trisectar un recto.

5. Construír ángulos de 15°, 7° 30′, 195°, 345°.

6. Construír un triángulo en que dos ángulos sean de 75° ¿Hay sólo un triángulo que llene esta condición?

PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA

232. *Por un punto dado de una recta, trazar otra que forme con aquélla un ángulo dado.*



Sean P el punto dado de la recta PQ, y AOB el ángulo dado.

Se desea trazar por P una recta que forme con PQ un ángulo igual a AOB.

Construcción. Con centro O y un radio cualquiera, trácese un arco que corte a OA en C y a OB en D.

Haciendo centro en P, y con el mismo radio, trácese un arco MX, que corte a PQ en M. N.° 53, 4.°

Haciendo centro en M, y con radio igual a la cuerda CD, descríbase un arco que corte al MX en N. N.° 53, 4.°

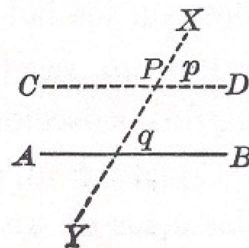
Trácese PN. N.° 53, 1.°

Entonces, $\angle QPN = \angle AOB$.

Demostración. Trácense las cuerdas CD y MN, y demuéstrese que $\triangle PMN = \triangle OCD$, N.° 80

y que por tanto $\angle QPN = \angle AOB$ (n.° 67). L.C.D.D.

233. COROLARIO. *Por un punto situado fuera de una recta, trazar una paralela a esa recta.*



Sean AB la recta y P el punto dado.

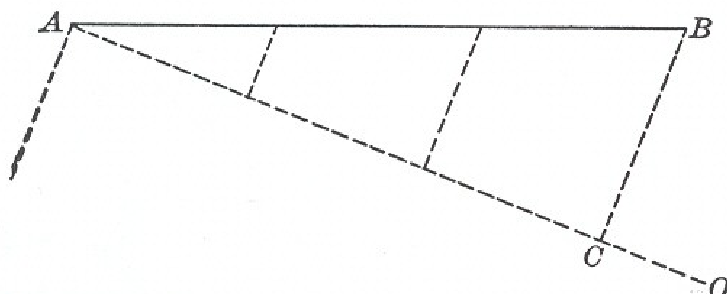
Por P trácese una recta cualquiera XPY que corte a AB.

Trácese CD de suerte que $\angle p$ sea igual a $\angle q$.

La recta CD será la paralela buscada.

Proposición XXVI. Problema

234. *Dividir una recta dada en un número dado de partes iguales.*



Sea AB **la recta dada.**

Se desea dividir AB *en un número dado de partes iguales.*

Construcción. De A trácese una recta cualquiera AO.

Elíjase una distancia conveniente cualquiera, y márquense consecutivamente en AO, con el compás, tantas partes iguales a esa distancia cuantas partes iguales deba tener AB.

Por C, último punto así determinado, trácese CB.

Por los puntos de división de AO trácense $\|$s a CB. N.° 233

Estas rectas dividirán AB en partes iguales.

Demostración. Síguese esto del n.° 134. L. C. D. D.

EJERCICIO 36

1. Dividir una recta dada en cuatro partes iguales.

2. Dado el perímetro de un triángulo equilátero, construír el triángulo.

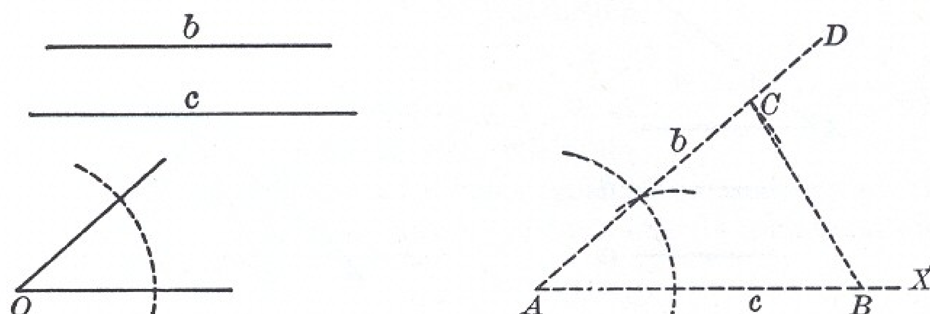
3. Por un punto dado trazar una recta que forme ángulos iguales con los lados de un ángulo dado.

4. Por un punto dado trazar dos rectas que formen dos triángulos isósceles con dos rectas concurrentes dadas.

5. Construír un triángulo cuyos ángulos sean respectivamente iguales a los de un triángulo dado.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA

235. *Dados dos lados de un triángulo y el ángulo comprendido, construír el triángulo.*



Sean b **y** c **dos lados de un triángulo, y** O **el ángulo comprendido.**

Se desea construír el triángulo.

Construcción. En una recta cualquiera AX tómese, trazando un arco, un segmento AB igual al lado c.

Constrúyase en A el $\angle BAD$ igual al O. N.° 232

Como antes, tómese en AD un segmento AC igual a b.

Trácese BC.

El $\triangle ABC$ es el buscado.

Demostración. (Se deja al alumno.)

236. Corolario 1.° *Construír un triángulo conociendo un lado y dos ángulos.*

Deben tratarse dos casos: 1.° cuando el lado es adyacente a los dos ángulos; 2.° cuando es opuesto a uno de ellos. En el caso 2.°, hállese el tercer ángulo (n.° 107).

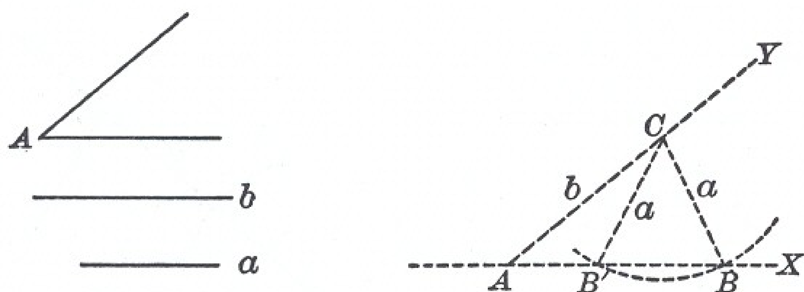
237. Corolario 2.° *Construír un triángulo conociendo los tres lados.*

238. Corolario 3.° *Construír un paralelogramo conociendo un ángulo y los lados que lo forman.*

Combínense los n.os 235 y 233.

PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA

239 *Construír un triángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.*



Sean *a* y *b* dos lados de un triángulo, y *A* el ángulo opuesto al lado *a*.

Se desea construír el triángulo.

Construcción. Hay que distinguir tres casos.

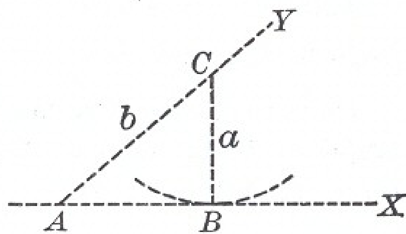
CASO 1.° *Cuando* a *es menor que* b.

Constrúyase el $\angle XAY$ igual al $\angle A$. N.° 232

En AY, tómese AC igual a b.

Haciendo centro en C, con radio a, trácese un arco que corte a AX en B y B'. Trácense BC y $B'C$.

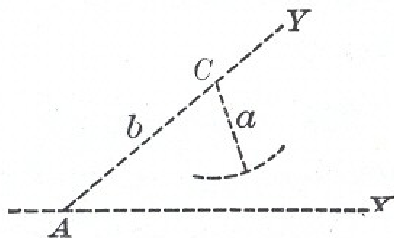
Los $\triangle ABC$, $AB'C$ satisfacen las condiciones del problema. Hay pues dos soluciones, y por tanto el problema es ambiguo.



Discusión. Si a es igual a la $\perp CB$, el arco descrito de C es tangente a AX, y habrá sólo una solución — el $\triangle$ rectángulo ABC.

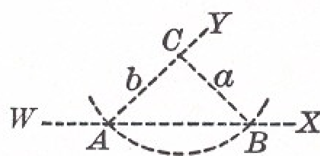
Si a es menor que la $\perp$ bajada de C a AX, el arco descrito de C no encontrará AX, y el problema es imposible.

Si A es recto u obtuso, el problema es imposible, puesto que $a < b$, y el lado opuesto a un ángulo recto u obtuso es mayor que los otros (n.° 114).



Caso 2.° *Cuando* a *es igual a* b.

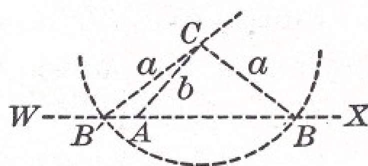
Si A es agudo, y $a = b$, el arco descrito de C como centro, con radio a, corta la recta WX en dos puntos A, B. En este caso hay pues sólo un triángulo que llena las tres condiciones, a saber: el triángulo isósceles ABC.



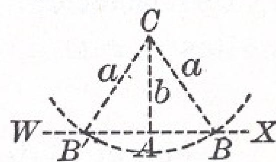
Discusión. Si A es recto u obtuso, y $a = b$, el problema es imposible; pues en todo triángulo isósceles los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales, y un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso (n.° 109).

Caso 3.° *Cuando* a *es mayor que* b.

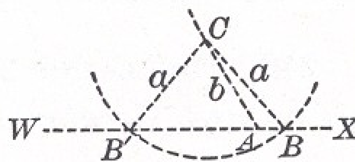
Si A es agudo, el arco descrito de C cortará la recta WX en lados opuestos del vértice A, en B y B'. El $\triangle ABC$ satisface las condiciones del problema; el $\triangle AB'C$ no las satisface, porque no contiene el ángulo dado A. Síguese pues que en este caso el problema no tiene más que una solución.



Si A es recto, el arco descrito de C cortará la recta WX en lados opuestos del vértice, en B y B', y los dos ⊿ rectángulos iguales ABC, $AB'C$ satisfacen las condiciones del problema, que tiene por tanto dos soluciones.



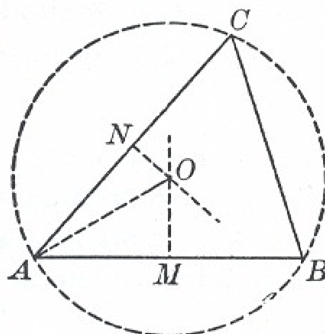
Si A es obtuso, el arco descrito de C cortará WX en dos puntos B y B'; pero esto no implica que haya dos soluciones. El $\triangle ABC$ satisface las condiciones del problema; el $\triangle AB'C$ no las puede satisfacer, pues no puede contener el ángulo obtuso A; de suerte que en este caso no hay más que una solución — el $\triangle ABC$.



Discusión. Vese pues que cuando $a > b$ hay sólo un triángulo que satisface las condiciones, puesto que los dos triángulos rectángulos iguales son en realidad un mismo triángulo en dos posiciones

PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA

240. *Circunscribir un círculo a un triángulo dado.*



Sea *ABC* el triángulo dado.

Se desea circunscribir un círculo al triángulo ABC.

Construcción. Trácense las ⊥s bisectrices de AB, AC. N.° 229

Puesto que AB no es prolongación de CA, estas ⊥s se encontrarán en un punto O. A no hacerlo, serían ∥s, y una de ellas sería perpendicular a dos rectas concurrentes. N.° 82

Haciendo centro en O, con radio OA, descríbase un círculo. N.° 53, 4.°

El círculo ABC es el buscado.

Demostración. El punto O equidista de los A y B, y también de los A y C. N.° 150

∴ O equidista de A, B y C.

Luego el ⊙ de centro O y radio OA pasa por A, B, C (n.° 160).

L.C.D.D.

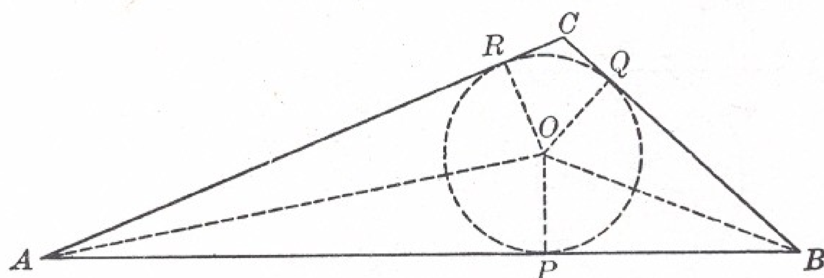
241. COROLARIO 1.° *Trazar un círculo por tres puntos no situados en línea recta.*

242. COROLARIO 2.° *Hallar el centro de un círculo dado o de un arco circular dado.*

243. Circuncentro. Llámase a veces *circuncentro* de un polígono el centro del círculo circunscrito al polígono. Por lo común se llama simplemente *centro del círculo circunscrito.*

Proposición XXX. Problema

244. *Inscribir un círculo en un triángulo dado.*



Sea ABC el triángulo dado.

Se desea inscribir un círculo en el triángulo ABC.

Construcción. Biséctense los ∡ A y B. N.° 231

Por O, intersección de las bisectrices, trácese la recta OP perpendicular al lado AB. N.° 227

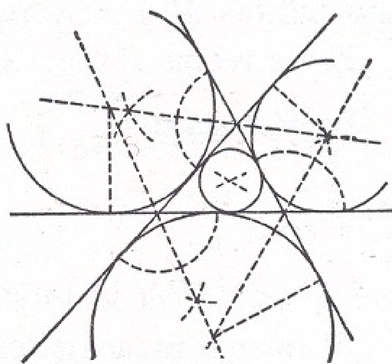
Con centro O y radio OP, descríbase el círculo PQR.

El círculo PQR es el buscado.

Demostración. El punto O equidista de AB, AC, BC, por ser punto de las bisectrices de los ∡ A, B, C. N.° 152

Luego el círculo de centro O y radio AP es tangente a los tres lados del triángulo, y es por consiguiente el círculo inscrito del triángulo (n.° 184). L.C.D.D.

245. Círculos exinscritos. Si se trazan las bisectrices de los ángulos externos de un triángulo, sus intersecciones, como se ve en esta figura, determinan los centros de tres círculos cada uno de los cuales es tangente exteriormente a uno de los lados y también a las prolongaciones de los otros dos lados. Con respecto al triángulo, estos círculos se llaman *círculos exinscritos.*



Proposición XXXI. Problema

246. *Por un punto dado, trazar una tangente a un círculo dado.*

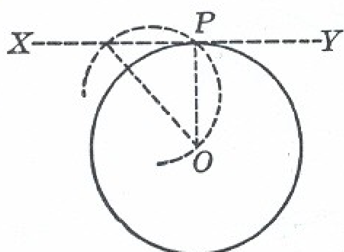


Fig. 1

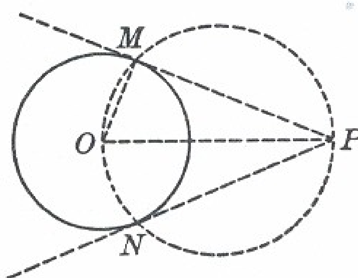


Fig. 2

Sean P el punto dado y O el centro del círculo dado.

Se desea trazar por P una tangente al círculo.

Caso 1.° *Cuando P está en la circunferencia* (fig. 1).

Construcción. Trácese el radio OP. N.° 53, 1.°

Por P trácese $XY \perp$ a OP. N.° 228

XY es la tangente que se busca.

Demostración. Por construcción, XY es $\perp$ al radio OP; luego es tangente en P al círculo (n.° 184). L.C.D.D

Caso 2.° *Cuando P está fuera del círculo* (fig. 2).

Construcción. Trácese y biséctese OP. N.° 229

Haciendo centro en el punto medio de OP, y con radio igual a $\frac{1}{2}$ OP, descríbase una circunferencia, que cortará la dada en dos puntos M y N, y trácense PM, PN.

Estas rectas son ambas tangentes al círculo.

Demostración. Trácese OM.

$\angle OMP = 1$ rt.; N.° 215

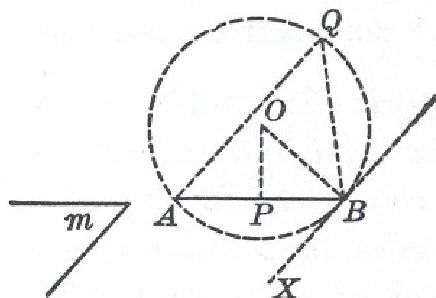
$\therefore PM$ es $\perp$ a OM.

$\therefore PM$ es tangente en M al círculo (n.° 184). L.C.D.D.

El mismo razonamiento se aplica a PN.

PROPOSICIÓN XXXII. PROBLEMA

247. *Sobre una recta dada, trazar un arco capaz de contener un ángulo dado.*



Sean AB la recta dada y m el ángulo dado.

Se desea trazar sobre AB un arco capaz de contener el ángulo m*; es decir, en que* m *pueda inscribirse.*

Construcción. Constrúyase $\angle ABX$ igual al $\angle m$. N.° 232

Trácese PO, $\perp$ bisectriz de AB. N.° 229

En B levántese $BO \perp$ a XB. N.° 228

Con centro O y radio OB descríbase un círculo.

El arco AQB es el que se busca.

Demostración. El punto O equidista de A y B; N.° 150

$\therefore$ el $\odot$ pasará por A. N.° 160

Ahora bien, BX es $\perp$ a OB; Por constr.

$\therefore BX$ es tangente al $\odot$; N.° 184

$\therefore \angle ABX$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco AB. N.° 220

Todo ángulo, como Q, inscrito en el arco AQB tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco AB. N.° 214

$\therefore \angle Q = \angle ABX$,

y por tanto $\angle Q = \angle m$. N.° 52, 8.°

$\therefore$ todo ángulo inscrito en el arco AQP es igual a m. L.C.P.D.

248. Manera de resolver un problema. Las tres maneras más comunes de resolver problemas son:

1.ª por síntesis;
2.ª por análisis;
3.ª por lugares geométricos.

249. Método sintético. En problemas muy simples, la resolución casi salta a la vista como aplicación inmediata de una o más proposiciones conocidas. Ejecútase entonces la construcción indicada por tales proposiciones, y luégo, por medio de ellas mismas, se demuestra la validez de la construcción, si fuere necesario.

Los simples casos a que este método puede aplicarse son relativamente raros. El método más general y casi siempre el mejor es el analítico.

250. Método analítico. En este método:

1.° Se supone el problema resuelto y se ve qué consecuencias se deducen de las condiciones supuestas.

2.° Se ve si es posible construír una figura que satisfaga estas consecuencias, consideradas ahora como condiciones del problema.

Del tercer método se trata en la página 143.

251. Problemas determinados, indeterminados e imposibles. Se dice que un problema es *determinado* cuando tiene un número definido de soluciones; *indeterminado*, cuando tiene un número indefinido de soluciones; *imposible*, cuando no tiene solución

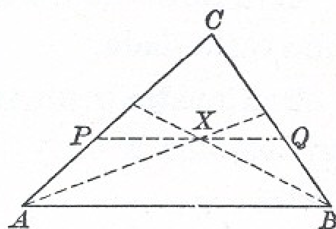
Por ejemplo, el problema de construír un triángulo cuando se conocen los tres lados es determinado (pero véase más abajo); el de construír un cuadrilátero con cuatro lados dados es indeterminado; el de construír un triángulo con tres rectas tales que una de ellas es mayor que la suma de las otras dos es imposible.

252. Discusión. Como queda dicho, la *discusión* de un problema es el estudio de todos los casos que pueden presentarse, sobre todo en lo referente al número de soluciones.

253. Aplicaciones del método analítico. A continuación se dan varios ejemplos del empleo del método analítico.

EJERCICIO 37

1. Dado el triángulo ABC, trazar PQ paralela al lado AB e igual a $AP + BQ$.



Análisis. Supóngase el problema resuelto.

Entonces AP debe ser igual a alguna parte de PQ, como PX, y BQ a la otra parte QX.

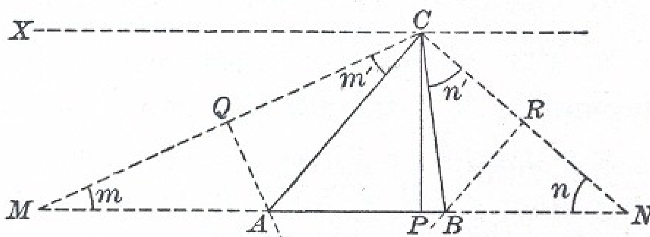
Si $AP = PX$, ¿a cuál ángulo debe ser igual el PXA ?

Puesto que PQ es $\parallel$ a AB, ¿á cuál ángulo es igual el PXA ? ¿Por qué debe pues $\angle BAX$ ser igual a XAP ? ¿Y qué relación debe haber entre los $\measuredangle$ QBX y XBA ?

Construcción. Invirtiendo el procedimiento, ¿qué debe hacerse con los $\measuredangle$ A y B para hallar X ? Dénse la construcción y demostración.

2. Construír un triángulo, dados el perímetro, un ángulo y la perpendicular del vértice de ese ángulo al lado opuesto.

Análisis. Sean ABC el $\triangle$, C el ángulo dado, y CP la perpendicular.



Puesto que el perímetro es la suma de los lados, prolonguemos AB y BA, y hagamos $BN = BC$ y $AM = AC$.

¿A cuáles $\measuredangle$ son iguales los m y n respectivamente?

Ahora bien, $\angle m + \angle n + \angle MCN = 180°$.

Además, $\angle MCN = \angle m' + \angle ACB + \angle n'$;

$$\therefore 2\angle m + 2\angle n + \angle ACB = 180°;$$

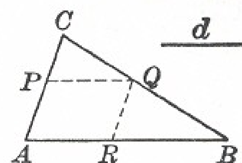
$$\therefore \angle m + \angle n = 90° - \tfrac{1}{2}\angle ACB;$$

$$\therefore \angle MCN = 90° + \tfrac{1}{2}\angle ACB \text{ (¿por qué?)};$$

$\therefore \angle MCN$ es conocido.

Construcción. Inviértase el procedimiento. Trácese MN igual al perímetro. Sobre MN constrúyase un arco capaz de contener el $\angle MCN$ (n.º 247). Trácese $XC \parallel$ a MN a la distancia CP de MN. Los vértices A y B están en las $\perp$ bisectrices de CM y CN. ¿Por qué ?

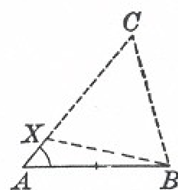
3. Trazar una recta de longitud dada que esté limitada por dos lados de un triángulo y sea además paralela al tercero.



Si $PQ = d$, ¿a qué es igual AR? ¿Cómo se puede invertir el razonamiento?

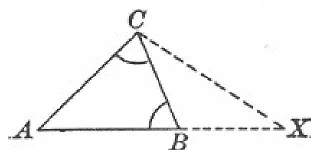
4. Trazar una tangente a un círculo dado que sea paralela a una recta dada.

5. Construír un triángulo, dados un lado, uno de los ángulos adyacentes a él, y la diferencia de los otros dos lados.



Si se conocen AB, $\angle A$ y $AC - BC$, ¿cuáles puntos quedan así determinados? ¿Puede entonces trazarse BX? ¿De qué clase es el $\triangle BCX$? ¿Cómo se determina C?

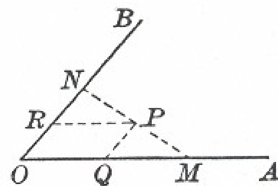
6. Construír un triángulo dados dos ángulos y la suma de dos lados.



Hállese el $\angle A$. Si $AX = AB + BC$, ¿de qué clase es el $\triangle BCX$? ¿A qué es igual el $\angle ABC$? ¿Es X conocido? ¿Cómo se determina C?

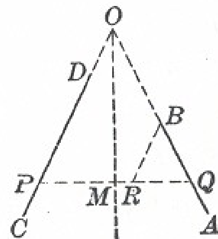
7. Construír un cuadrado, dada la diagonal.

8. Por un punto P interior a un ángulo AOB, trazar un segmento MN tal que PN sea igual a PM.



Si $PM = PN$, y PR es $\parallel$ a AO, ¿qué se deduce en cuanto a OR y RN? Inviértase el procedimiento. Análogamente, si PQ es $\parallel$ a BO, ¿es OQ igual a QM?

9. Trazar la bisectriz de un ángulo cuyo vértice es inaccesible.



Siendo AB y CD los lados, estúdiense las propiedades de la figura suponiendo que pueden prolongarse hasta su intersección. La bisectriz del $\angle O$ es la $\perp$ bisectriz de PQ, que forma ángulos iguales con AB y CD.

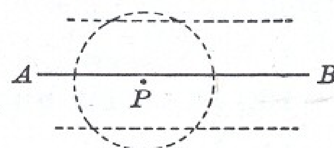
Inviértase ahora el procedimiento. ¿Cómo puede trazarse PQ de suerte que los ángulos P y Q sean iguales? Trácese $BR \parallel$ a CD, y hágase $BR = BQ$. Trácese QRP, y demuéstrese que los $\measuredangle P$ y Q son iguales. Trácese ahora la perpendicular bisectriz de PQ.

254. Método de las intersecciones de lugares geométricos. El método de los lugares geométricos (n.º 248) es útil cuando se trata de determinar un punto sujeto a dos condiciones, una de las cuales es satisfecha por los puntos de un lugar geométrico y la otra por los de otro. La intersección de estos lugares determina el punto.

EJERCICIO 38

1. Hallar un punto que diste 8 mm. de un punto dado y 5 mm. de una recta dada.

Si P es el punto dado, y AB la recta dada, ¿cuál es el lugar geométrico de los puntos que distan 8 mm. de P? ¿cuál el de los distantes 5 mm. de AB? ¿En cuántos puntos pueden cortarse estos dos lugares?



2. Hallar un punto distante 1 cm. y 2 cm. de dos puntos dados

Discútase el número de puntos posibles.

3. Hallar un punto que se halle a 12 mm. del vértice de un ángulo y equidiste de los lados del ángulo.

4. Hallar un punto que equidiste de dos rectas que se cortan y diste 8 mm. del punto de intersección.

¿Cuántos puntos satisfacen las condiciones?

5. Hallar un punto que diste 16 mm. de un punto dado y equidiste de dos rectas dadas que se cortan. Discútase el problema.

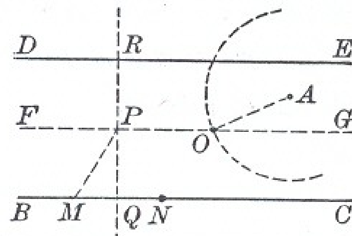
6. Hallar un punto que diste 16 mm. de un punto dado y equidiste de dos paralelas. Discútanse las posiciones posibles del punto dado.

7. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto medio de las cuerdas de longitud dada que pueden trazarse en un círculo?

8. Por un punto interior a un círculo se trazan cuerdas en número indefinido. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos medios de dichas cuerdas?

9. Describir un círculo que pase por un punto dado e intercepte en dos paralelas cuerdas iguales de longitud dada.

Análisis. Sean A el punto dado, BC y DE las ‖s dadas, MN la longitud dada, y O el centro del círculo que se busca.



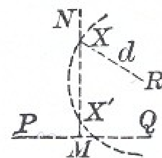
Puesto que el círculo intercepta cuerdas iguales en las dos ‖s, ¿qué se sabe de la distancia del centro a estas cuerdas? ¿Cuál es pues el lugar geométrico del centro?

Trácese la ⊥ bisectriz de MN. Sea P su punto de intersección con FG. ¿Qué relación existe entre PM y el radio? ¿Cómo puede pues hallarse un punto O de FG cuya distancia de A sea PM? ¿Es O el centro del círculo buscado?

10. Describir un círculo tangente a dos rectas concurrentes.

11. Determinar en una recta dada un punto equidistante de dos puntos dados.

12. Hallar un punto que equidiste de dos puntos dados y se halle a una distancia dada de otro punto dado.



13. Por dos puntos dados trazar una circunferencia de radio dado.

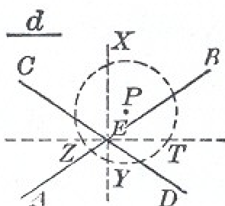
14. Determinar un punto, conocida su distancia a dos puntos dados.

15. Trazar un círculo que pase por dos puntos dados y tenga el centro en una recta dada.

16. Hallar un punto equidistante de dos puntos dados y también de dos rectas concurrentes dadas.

17. Hallar un punto equidistante de dos puntos dados y también de dos paralelas dadas.

18. Hallar un punto que equidiste de dos rectas concurrentes y esté a una distancia dada de un punto dado.



19. Hallar en uno de los lados de un triángulo un punto equidistante de los otros dos lados.

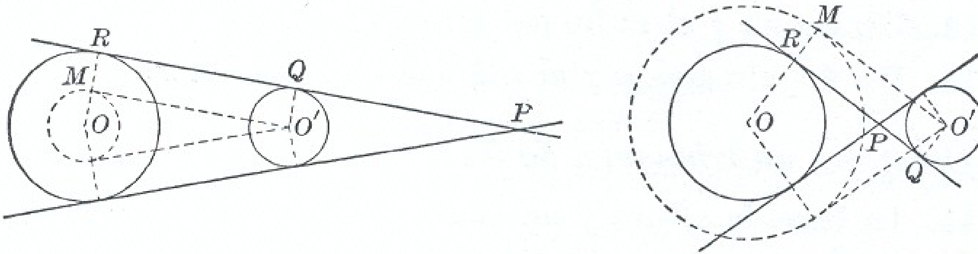
255. Instrucciones generales para resolver problemas. Al dar principio a la resolución de un problema, dibújese con alguna exactitud una figura de forma general. Si el método de resolución no saltare a la vista, véase si el problema se reduce a determinar la intersección de dos lugares geométricos. Si no es éste el caso, supóngase el problema resuelto y aplíquese el método analítico.

EJERCICIO 39

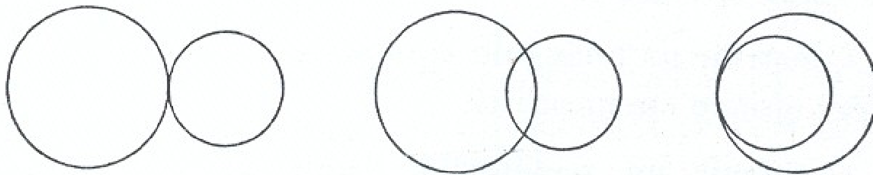
1. Trazar una tangente común a dos círculos dados.

Sean O, O' los centros, y r, r' los radios. Suponiendo el problema resuelto, la tangente QR parece ser $\parallel$ a $O'M$, tangente trazada por O' a un círculo de radio $r - r'$. Si esto es cierto, puede deducirse de ello el método de construcción.

En la figura derecha, ¿es $QR \parallel$ a $O'M$, tangente a un círculo de radio $r + r'$? Y si esto es cierto, ¿qué construcción resuelve el problema? Generalmente hay cuatro tangentes comunes.



2. Trazar una tangente común a los dos círculos de cada uno de estos pares:



3. El lugar geométrico del vértice de un triángulo rectángulo de hipotenusa dada es la circunferencia cuyo diámetro es esa hipotenusa.

4. El lugar geométrico del vértice de un ángulo dado opuesto a un lado dado de un triángulo es el arco descrito sobre ese lado capaz de contener ese ángulo.

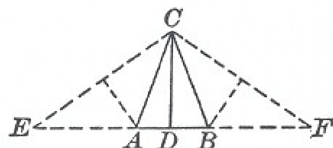
Construír un triángulo isósceles, dados:

5. La base y el ángulo opuesto.

6. La base y el radio del círculo circunscrito.

7. La base y el radio del círculo inscrito.

8. El perímetro y la perpendicular trazada a la base del vértice opuesto.



Sea EF el perímetro. La $\perp$ bisecta EF, y los $\triangle$ CAE, CBF son isósceles.

Construír un triángulo rectángulo, dados:

9. La hipotenusa y un cateto.

10. Un cateto y la perpendicular del vértice del ángulo recto a la hipotenusa.

11. La misma perpendicular y la mediana correspondiente.

12. La misma perpendicular y la hipotenusa.

13. Un cateto y el radio del círculo inscrito.

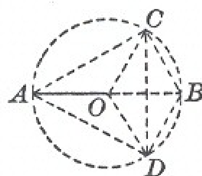
14. Un ángulo agudo y el radio del círculo inscrito.

Construír un triángulo, dados:

15. La base, la altura y un ángulo adyacente a la base.

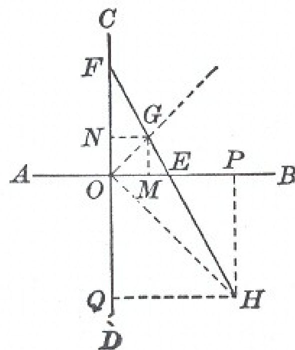
16. La base, la altura y el ángulo opuesto a la base.

17. Un lado, un ángulo adyacente y la suma de los otros dos lados.



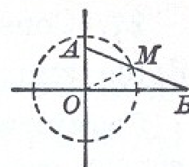
18. Construír un triángulo equilátero, dado el radio del círculo circunscrito.

19. Construír un rectángulo, dados un lado y el ángulo de las diagonales.

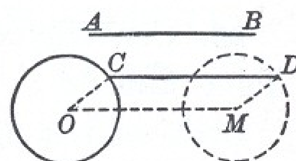


20. Dados los ángulos rectos O y la recta FE, construír un cuadrado tal que uno de sus ángulos coincida con uno de los rectos O y el vértice del opuesto esté en FE o en su prolongación. (Dos soluciones.)

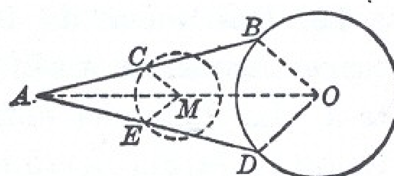
21. Una recta se mueve de tal manera que constantemente se apoya en otras dos, perpendiculares entre sí. Hállese el lugar geométrico de su punto medio.



22. Una recta se mueve permaneciendo siempre paralela a una recta dada, y con uno de sus extremos sobre una circunferencia dada. Hállese el lugar geométrico del otro extremo.

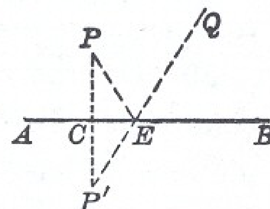


23. ¿Cuál es el lugar geométrico del punto medio de las rectas que van a una circunferencia dada de un punto exterior dado?



24. Por dos puntos P y Q trazar rectas que se encuentren en la dada AB y formen con ella ángulos iguales.

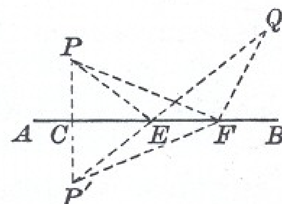
$\angle CEP' = \angle PEC$. Pueden hacerse estos ∡ iguales trazando $PP' \perp$ a AB, y haciendo $CP' = PC$.



25. Hallar el camino más corto del punto P al Q que pase por un punto de la recta AB.

$PE + EQ < PF + FQ$, siendo $\angle BEQ = \angle PEC$.

Esto demuestra que el camino recorrido por un rayo de luz reflejado por un espejo de un punto a otro es el menor posible.



26. Las bisectrices de los ángulos formados por las prolongaciones de los lados opuestos de un cuadrilátero inscrito se cortan en ángulo recto.

Arco $AX -$ arco $MD =$ arco $XB -$ arco CM;

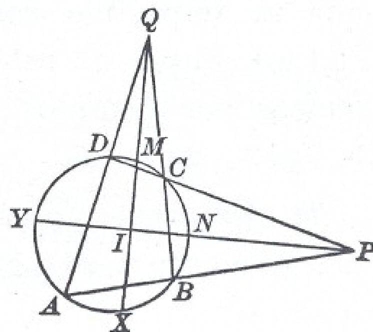
arco $YA -$ arco $BN =$ arco $DY -$ arco NC;

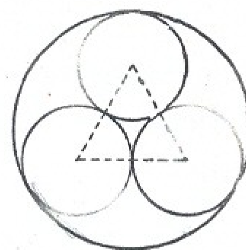
$\therefore$ arco $YX +$ arco $NM =$ arco $MY +$ arco XN.

$\therefore \angle YIX = \angle XIN$.

$\therefore PY$ es $\perp$ a QX.

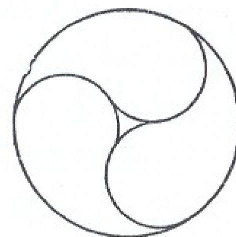
Discútase el caso imposible.





27. Constrúyase esta figura, haciéndola de doble tamaño.

Constrúyase el triángulo equilátero, descríbanse los círculos pequeños con la mitad del lado por radio, y hállese el centro del círculo circunscrito.



28. Constrúyase esta figura, haciéndola de doble tamaño.

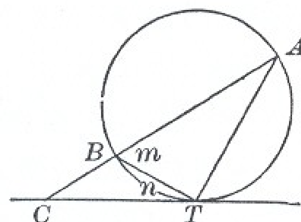
Obtiénese esta figura borrando ciertas líneas en la anterior.

29. Dos poleas de 40 cm. y 60 cm. de radio respectivamente están unidas por una correa tesa. La distancia entre los centros es de 2,4 m. Trácese la figura en escala de 25 mm. por metro.

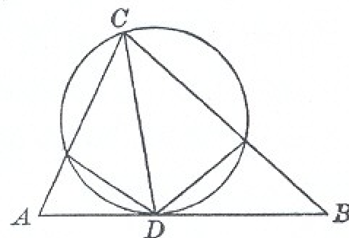
Cada polea se representa por un círculo, y la correa por tangentes comunes a los dos círculos.



30. De una rueda rota queda un fragmento como éste. Dibújese una figura que indique la manera de hacer otra rueda del mismo tamaño.

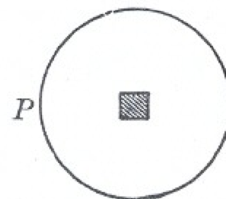


31. En esta figura, $\angle m = 62°$, $\angle n = 28°$. Hállense los valores de los otros ángulos, y determínese si AB es un diámetro.



32. En esta figura, $\angle B = 45°$, $\angle BDC = 97°$. Hállense los valores de los otros ángulos, y determínese si CD es un diámetro.

33. Constrúyanse o explíquese por qué es imposible construír triángulos con los grupos de valores siguientes (en metros, por ejemplo) por lados: 3, 2, 6; 5, 7, 12; 2, 1, 1,5.



34. Explíquese cómo puede trazarse en P una tangente a este círculo, cuyo centro es inaccesible.

EJERCICIO 40

1. En un círculo cuyo centro es O se traza la cuerda AB de suerte que el ángulo BAO es de 27°. ¿Cuál es el valor del ángulo AOB en grados?

2. En un círculo cuyo centro es O se traza la cuerda AB, de suerte que $\angle BAO = 25°$. Del mismo lado de AB que O, se toma un punto D en la circunferencia. ¿Cuál es el valor del ángulo ADB?

3. Hállese el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas determinadas por secantes trazadas a un círculo de un punto exterior dado.

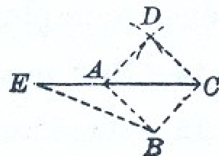
4. En un círculo cuyo centro es O se trazan dos perpendiculares OM, ON a las cuerdas AB y CD respectivamente. Suponiendo $\angle NMO = \angle ONM$, demuéstrese que la cuerda AB es igual a la CD.

5. Dos circunferencias se cortan en dos puntos A y B. Por el punto A se traza una secante variable, que corta las dos circunferencias en los puntos C y D respectivamente. Demuéstrese que el ángulo DBC es constante.

6. Sean A, B puntos fijos de una circunferencia, y M, N los extremos de un diámetro que gira. Hállese el lugar geométrico de la intersección de AM y BN.

7. Sobre la recta AB se construye un arco de 240°, y en éste se traza una cuerda PQ que subtiende un arco de 60°. Hállese el lugar geométrico de la intersección de AP y BQ, y también el de la intersección de AQ y BP.

8. Construír un cuadrado conociendo la suma del lado y la diagonal.



Sea $ABCD$ el cuadrado. Prolónguese CA, y hágase $AE = AB$. Los $\triangle ABC$, ABE son isósceles, y además $\angle BAC = \angle ACB = 45°$. ¿Cuál es el valor del ángulo E? Constrúyase el ángulo CBE.

EJERCICIO 41

Cuestionario de repaso

1. Defínanse los términos *círculo, circunferencia, radio, diámetro, arco, cuerda.*

2. ¿Qué es un ángulo central, y cuál es su medida?

3. ¿Qué es ángulo inscrito? ¿Cuál es la medida de un ángulo inscrito?

4. Enúnciese un teorema general que incluya todos los casos relativos a la medida del ángulo formado por dos rectas que se cortan.

5. Enúnciense todos los teoremas relativos a cuerdas iguales de un mismo círculo.

6. Enúnciense todos los teoremas relativos a cuerdas desiguales de un mismo círculo.

7. Dígase lo que se sepa relativo a tangentes.

8. ¿Cuántos puntos determinan una recta? dos paralelas? un ángulo? un círculo?

9. Nómbrese una magnitud geométrica que se sepa trisectar, y explíquese cómo se trisecta.

10. ¿Qué partes deben conocerse para construír un triángulo único?

11. ¿Cuáles son los métodos empleados en la resolución de problemas geométricos? ¿Cuál es el más general?

12. ¿Qué se entiende por problemas determinados, indeterminados e imposibles?

13. ¿En qué se diferencia una variable de una constante? Dénse ejemplos.

14. Defínanse *círculo inscrito* y *círculo circunscrito.*

15. ¿Qué significa la proposición de que todo ángulo central se mide por el arco que lo subtiende?

LIBRO III

PROPORCIONES.—POLÍGONOS SEMEJANTES

256. Proporción. Llámase *proporción* la expresión de la igualdad de dos razones.

257. Símbolos. Una proporción puede escribirse de tres maneras, a saber: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, $a : b = c : d$, $a : b :: c : d$.

La primera forma se lee: a *sobre* b *igual* c *sobre* d; las otras, a *es a* b *como* c *es a* d.

258. Términos. Llámanse *términos* de una proporción las cuatro cantidades que entran en ella. El primero y tercer términos se llaman *antecedentes*; el segundo y el cuarto, *consecuentes*. El primero y el cuarto se llaman *extremos*; el segundo y tercero, *medios*.

En la proporción $a : b = c : d$, a y c son los antecedentes; b y d, los consecuentes; a y d, los extremos; b y c, los medios.

259. Cuarta proporcional. Llámase *cuarta proporcional* de tres cantidades dadas la cantidad que forma el cuarto término de una proporción cuyos otros términos son las tres cantidades dadas. tomadas en orden.

En $a : b = c : d$, d es cuarto proporcional de a, b y c.

260. Proporción continua. Llámase *proporción continua* aquella en que los medios son iguales, como $a : b = b : c$.

El medio común se llama *medio proporcional* entre los extremos; y el cuarto término, *tercero proporcional* de los dos primeros.

En $a : b = b : c$, b es medio proporcional entre a y c, o de a y c; c, tercero proporcional de a y b.

PROPOSICIÓN I. TEOREMA

261. *En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios.*

Sea la proporción $a : b = c : d$.

Demostrar que $ad = bc$.

Demostración. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. N.° 257

Multiplicando por bd, $ad = bc$ (n.° 52, 2.°). L. C. D. D.

262. COROLARIO 1.° *La media proporcional de dos cantidades es igual a la raíz cuadrada de su producto.*

En efecto, si $a : b = b : c$, se tendrá (n.° 261) : $b^2 = ac$, $b = \sqrt{ac}$.

263. COROLARIO 2.° *Si los antecedentes de una proporción son iguales, los consecuentes también lo son.*

264. COROLARIO 3.° *Si el producto de dos cantidades es igual al producto de otras dos, las dos de cualquiera de los dos productos pueden formar los extremos y las otras dos los medios de una proporción.*

PROPOSICIÓN II. TEOREMA

265. *En toda proporción se pueden cambiar los medios uno por otro, de lo cual resulta otra proporción.*

Sea la proporción $a : b = c : d$.

Demostrar que $a : c = b : d$.

Demostración. $ad = bc$. N.° 261

Dividiendo por cd, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$, N.° 52, 2.°

o sea, $a : c = b : d$ (n.° 257). L. C. D. D.

Esta operación se llama *alternar*.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA

266. *En toda proporción se pueden invertir las dos razones, de lo cual resulta otra proporción.*

Sea la proporción $a : b = c : d.$

Demostrar que $b : a = d : c.$

Demostración. $bc = ad.$ N.° 261

Dividiendo ambos miembros por ac,

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c},$$ N.° 52, 2.°

o sea, $b : a = d : c$ (n.° 257). L.C.D.D.

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA

267. *En toda proporción pueden agregarse a los dos antecedentes sus respectivos consecuentes, de lo cual resulta otra proporción.*

Sea la proporción $a : b = c : d.$

Demostrar que $a + b : b = c + d : d.$

Demostración. $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$ N.° 257

Agregando la unidad a los dos miembros,

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1,$$ N.° 52, 1.°

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

o sea, $a + b : b = c + d : d$ (n.° 257). L.C.D.D

Puede demostrarse análogamente que $a + b : a = c + d : c.$

La trasformación que acaba de explicarse se llama *composición*.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA

268. *En toda proporción pueden restarse de los antecedentes sus respectivos consecuentes, de lo cual resulta otra proporción.*

Sea la proporción $a : b = c : d.$

Demostrar que $a - b : b = c - d : d.$

Demostración. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$ N.° 257

$\therefore \frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1,$ N.° 52, 1.°

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d},$$

o sea, $a - b : b = c - d : d$ (n.° 257). L.C.D.D.

Puede demostrarse análogamente que

$$a - b : a = c - d : c.$$

La trasformación que acaba de explicarse se llama trasformación *por división*.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA

269. *En toda serie de razones iguales la suma de los antecedentes es a la suma de los consecuentes como uno cualquiera de los antecedentes es a su consecuente.*

Sea la serie de razones iguales $a : b = c : d = e : f = g : h.$

Demostrar que $a + c + e + g : b + d + f + h = a : b.$

Demostración. Sea $r = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}.$

Entonces $a = br, \quad c = dr, \quad e = fr, \quad g = hr;$ N.° 52, 2.°

$\therefore a + c + e + g = (b + d + f + h)r.$ N.° 52, 1.°

$\therefore \frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = r = \frac{a}{b},$ N.° 52, 2.°

o sea, $a + c + e + g : b + d + f + h = a : b$ (n.° 257). L.C.D.D.

Proposición VII. Teorema

270 *Las potencias iguales de los términos de una proporción forman otra proporción.*

Sea la proporción $a : b = c : d.$

Demostrar que $a^n : b^n = c^n : d^n.$

Demostración. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d};$ N.° 251

$\therefore \frac{a^n}{b^n} = \frac{c^n}{d^n},$ N.° 52, 3.°

o sea, $a^n : b^n = c^n : d^n.$ L.C.D.D.

Proposición VIII. Teorema

271. *En toda proporción continua el primer término es al cuarto como el cuadrado del primero es al del segundo.*

Sea la proporción continua $a : b = b : c.$

Demostrar que $a : c = a^2 : b^2.$

Demostración. $a^2 = a^2$ (ident.), y $ac = b^2;$ N.° 261

$\therefore \frac{a^2}{ac} = \frac{a^2}{b^2},$ o $\frac{a}{c} = \frac{a^2}{b^2},$ N.° 52, 2.°

o bien, $a : c = a^2 : b^2$ (n.° 257). L.C.D.D.

272. Carácter de las cantidades de una proporción. Aun cuando una razón puede ser la de una línea, un área u otra cantidad a otra de la misma especie, los términos de toda proporción se consideran como *números.*

Si b y d, por ejemplo, son líneas, no pueden multiplicarse los dos miembros de la igualdad $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ por bd (n.° 261).

Cuando se habla del producto de dos magnitudes geométricas, se entiende que se trata de los números que las miden.

EJERCICIO 42

1. Demuéstrese que $a : b = ma : mb$.

2. Si $a : b = c : d$, y $m : n = p : q$, también $am : bn = cp : dq$

Suponiendo a : b = c : d, *demuéstrese que:*

3. $a : d = bc : d^2$.

4. $1 : b = c : ad$.

5. $ad : b = c : 1$.

6. $ma : b = mc : d$.

7. $ma : nb = mc : nd$.

8. $a - 1 : b = bc - d : bd$.

9. $a + 1 : 1 = bc + d : d$.

10. $1 : bc = 1 : ad$.

11. $a + b : a - b = c + d : c - d$.

En el n.º 11 del ejercicio, empléense los n.ºs 267, 268 del texto.

Suponiendo a : b = b : c, *demuéstrese que:*

12. $c : b = b : a$.

13. $a : c = b^2 : c^2$.

14. $(b + \sqrt{ac})(b - \sqrt{ac}) = 0$

15. $ac - 1 : b - 1 = b + 1 : 1$.

16. Si $2 : 7 = 3 : x$, demuéstrese que $2x = 21$, $x = 10\frac{1}{2}$.

Hállese el valor de x *en las siguientes proporciones:*

17. $1 : 7 = 3 : x$.

18. $2 : 9 = 5 : x$.

19. $4 : 28 = 3 : x$.

20. $2 : 8 = x : 12$.

21. $3 : 5 = x : 9$.

22. $7 : 21 = x : 5$.

23. $3 : 5 = x + 1 : 10$.

24. $8 : 15 = 2x + 3 : 45$.

25. $0{,}8 : x = 4 : 9$.

26. $0{,}7 : x = 21 : 15$.

27. $0{,}25 : x = 5 : 8$.

28. $x : 1{,}3 = 4 : 0{,}26$

29. $x : 2{,}7 = 7 : 5{,}4$.

30. $x : 8{,}1 = 0{,}3 : 0{,}9$.

31. $2 : x = x : 32$.

32. $7 . x = x : 28$.

33. $1 : 1 + x = x - 1 : 3$.

34. $5 : x - 2 = x + 2 : 1$.

35. $x^2 : 2a = 3a : 6$.

36. $x : 4a = 2a^2 : x^2$.

37. $a : 1 = x - 1 : 7$.

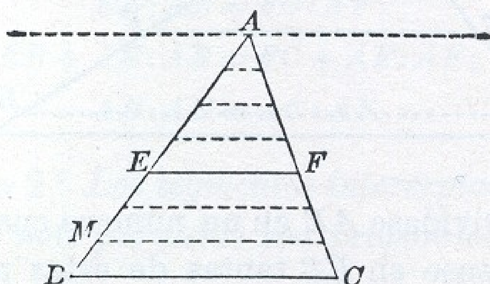
38. $x + 1 : x - 1 = 3 : 2$.

39. $3 : x + 4 = x - 4 : 3$.

40. $ab : b = b - cx : bc - x$.

Proposición IX. Teorema

273. *Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo divide los otros dos en partes proporcionales.*



Sea *EF* una paralela al lado *BC* del triángulo *ABC*.

Demostrar que $EB:AE = FC:AF.$

Caso 1.° *Cuando AE y EB son conmensurables.*

Demostración. Supóngase que el segmento MB es medida común de AE y EB, y está contenido m veces en EB, y n veces en AE.

Entonces se tendrá: $EB:AE = m:n$,

puesto que m y n son las medidas o valores numéricos de EB y AE respectivamente, en función de la unidad MB.

Divídanse EB y AE en partes iguales a MB, y por los puntos de división trácense paralelas a BC.

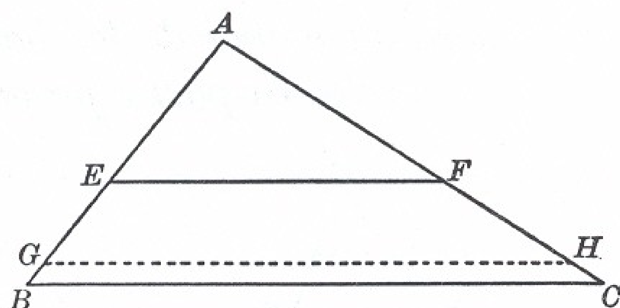
Estas paralelas dividirán FC y AF en m y n partes iguales respectivamente. N.° 134

$$\therefore FC:AF = m:n.$$

$$\therefore EB:AE = FC:AF \text{ (n.° 52, 7.°)}.$$ L.C.D.D.

Para los fines prácticos, esto demuestra la proposición, pues aun cuando AE y EB sean inconmensurables, sus valores pueden hallarse con el grado de aproximación que se quiera en función de una misma unidad, para lo cual basta tomar ésta suficientemente pequeña, y como esos valores aproximados son conmensurables, el teorema se aplica a ellos. Sin embargo, conviene dar la demostración rigorosa para el caso de inconmensurabilidad.

CASO 2.° *Cuando AE y EB son inconmensurables.*



Demostración. Divídase AE en un número cualquiera de partes iguales, y tómense en EB tantas de estas partes como sea posible.

Puesto que AE y EB son inconmensurables, EB contendrá cierto número de estas partes, que se extenderán hasta un punto G, y quedará un residuo GB menor que una de las partes.

Trácese $GH \parallel$ a BC. Entonces

$$EG : AE = FH : AF. \qquad \text{Caso 1.°}$$

Aumentando el número de partes en que AE se divide, puede hacerse cada parte menor que cualquier cantidad dada, y como GB es menor que una de esas partes, tiende hacia cero como límite. N.° 204

El segmento HC tiende también hacia cero.

Así pues, EG tiende hacia EB,

FH tiende hacia FC;

$\therefore$ la variable $\dfrac{EG}{AE}$ tiende hacia $\dfrac{EB}{AE}$ como límite,

y la variable $\dfrac{FH}{AF}$ tiende hacia $\dfrac{FC}{AF}$ como límite.

Ahora bien, $\dfrac{EG}{AE}$ es siempre igual a $\dfrac{FH}{AF}$.

$$\therefore \frac{EB}{AE} = \frac{FC}{AF} \text{ (n.° 207).} \qquad \text{L. C D. D.}$$



274. Corolario 1.° *Dos lados de un triángulo son proporcionales a los segmentos determinados en ellos por cualquier paralela al tercer lado.*

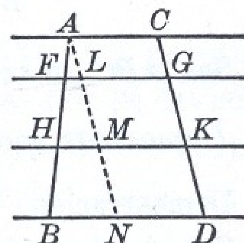
En efecto, se tiene :

$EB:AE = FC:AF;$ N.° 273

$\therefore EB + AE:AE = FC + AF:AF;$ N.° 267

esto es, $AB:AE = AC:AF.$ N.° 52, 10.°

275. Corolario 2.° *Los segmentos interceptados en dos transversales por tres o más paralelas son proporcionales.*



Trácese $AN \parallel$ a CD.

$AL = CG,\ LM = GK,\ MN = KD.$ N.° 127

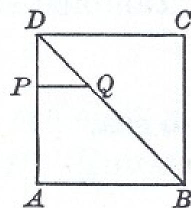
Ahora bien, $AH:AM = AF:AL = FH:LM,$ N.° 274

$AH:AM = HB:MN.$ N.° 273

$\therefore AF:CG = FH:GK = HB:KD.$

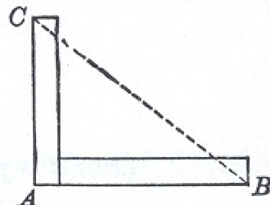
EJERCICIO 43

1. En la figura del n.° 275, supóngase $AH = 5$ cm., $AF = 2$ cm., $KC = 6$ cm., y hállese CG.



2. En este cuadrado, PQ es $\parallel$ a AB. Si $AB = 10$ cm., $DB = 14{,}14$ cm. Si $DP = 3$ cm., ¿cuál es la longitud de DQ?

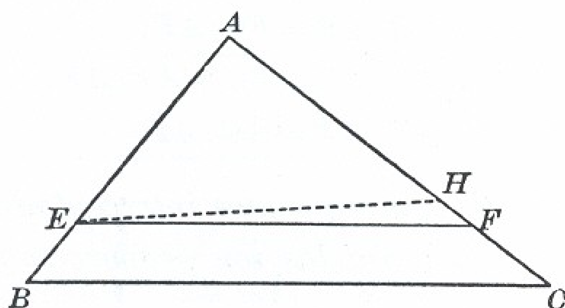
3. Los lados de un triángulo son respectivamente 3, 4 y 5 cm. Una paralela al lado de 4 cm. corta el de 3 cm. a 1 cm. del vértice del mayor ángulo. Calcúlense los segmentos interceptados en el lado mayor.



4. Dos tablas de 30 cm. de ancho se ensamblan en ángulo recto, como se indica aquí. $AB = 2{,}4$ m., $AC = 1{,}8$ m., $BC = 3$ m. Se desea cortar las esquinas según la línea de puntos. Hállese la longitud del corte, medida según esta línea, en cada una de las esquinas.

PROPOSICIÓN X. TEOREMA

276. *Si una recta divide dos lados de un triángulo en partes proporcionales, es paralela al tercer lado.*



Sea ABC un triángulo en que $EB:AE = FC:AF$.

Demostrar que EF *es* $\parallel$ *a* BC.

Demostración. Supóngase que EF no es $\parallel$ a BC.

Siendo éste el caso, puede trazarse por E una paralela a BC. Sea EH esta paralela.

Entonces se tendrá:

$AB:AE = AC:AH$. N.° 274

También se tiene: $EB:AE = FC:AF$. Por hipót.

$\therefore EB + AE:AE = FC + AF:AF$, N.° 267

o sea, $AB:AE = AC:AF$; N.° 52, 10.°

$\therefore AC:AF = AC:AH$. N.° 52, 8.°

Como en esta proporción los antecedentes son iguales, los consecuentes deben serlo también; esto es,

$AF = AH$. N.° 263

$\therefore EF$ coincide con EH. N.° 53, 1.°

(*Por dos puntos puede pasar una recta, y sólo una.*)

Ahora bien, EH es $\parallel$ a BC. Por constr.

$\therefore EF$, que coincide con EH, es $\parallel$ a BC. L.C.D.D.

Esta proposición es la recíproca de la proposición IX.

277. División de una recta en segmentos. Si la recta AB se divide en dos segmentos AP, PB, de suerte que el punto de división P se halle entre los extremos A y B, se dice que AB se ha dividido *interiormente*. Si se toma un punto P' en su prolongación, se dice que la recta se divide *exteriormente* en los segmentos AP', $P'B$.



En ambos casos los segmentos son las distancias del punto de división a los extremos de la recta. Si la división es interna, la recta es igual a la *suma* de los segmentos; si externa, a la *diferencia*.

Supóngase que se desea dividir la recta AB interior y exteriormente de suerte que los segmentos determinados por la división exterior estén entre sí en la relación de 3 a 5, y que los correspondientes determinados por la división interior estén en la misma relación.



Para esto se divide AB en $(3 + 5)$ partes iguales, o sea en 8, y se toman 3 de A hacia B hasta P. Entonces,

$$AP : PB = 3 : 5. \qquad (1)$$

Luégo se divide AB en $(5 - 3)$ partes iguales, o sea en 2, y se toman 3 de ellas en la prolongación de BA hasta P'. Entonces se tendrá, como anteriormente:

$$AP' : P'B = 3 : 5. \qquad (2)$$

De (1) y (2) se deduce

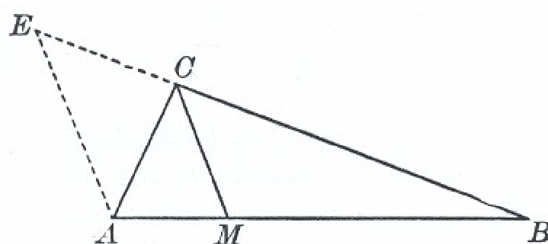
$$AP : PB = AP' : P'B.$$

278. División armónica. Dícese que una recta está dividida *armónicamente* cuando está dividida exterior e interiormente en segmentos proporcionales.

En el caso anterior, la recta AB está dividida armónicamente en P y P' en la razón $3 : 5$.

Proposición XI. Teorema

279. *La bisectriz de un ángulo cualquiera de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados.*



Sea CM la bisectriz del ángulo C del triángulo ABC.

Demostrar que $AM : MB = CA : CB$.

Demostración. Trácese por A una ∥ a MC.

Esta ∥ debe encontrar la prolongación de BC, pues BC y MC no pueden ser ambas paralelas a una misma recta. N.º 94

Sea E la intersección de la ∥ y la prolongación de BC.

Se tiene: $AM : MB = EC : CB$. N.º 273

(*Toda recta ∥ a uno de los lados de un △ divide los otros dos en partes proporcionales.*)

También, $\angle ACM = \angle CAE$, N.º 100

$\angle MCB = \angle AEC$. N.º 102

Como, según el supuesto, la recta CM es la bisectriz del $\angle ACB$, se tiene:

$$\angle ACM = \angle MCB;$$

$\therefore \angle CAE = \angle AEC$; N.º 52, 7.º

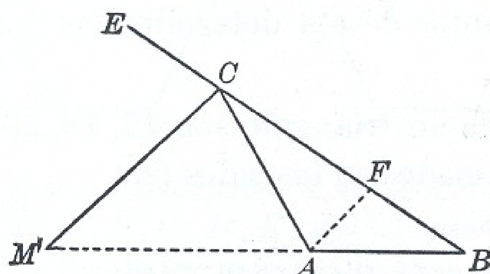
$\therefore EC = CA$. N.º 76

Reemplazando EC por CA, resulta:

$AM : MB = CA : CB$ (n.º 52, 8.º) L.C.D.D

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA

280. *La bisectriz de un ángulo externo cualquiera de un triángulo divide exteriormente el lado opuesto en segmentos proporcionales a los otros dos lados.*



Sean CM' la bisectriz del ángulo externo ECA del triángulo ABC, y M' el punto en que corta la prolongación de BA.

Demostrar que $AM' : M'B = CA : CB$.

Demostración. Trácese $AF \parallel$ a $M'C$.

$AM' : M'B = FC : CB$. N.° 274

(*En el* $\triangle BCM'$, AF *es* $\parallel$ *a* $M'C$.)

También se tiene: $\angle ECM' = \angle CFA$, N.° 102

$\angle M'CA = \angle FAC$. N.° 100

Además, $\angle ECM' = \angle M'CA$; Por hipót.

$\therefore \angle CFA = \angle FAC$; N.° 52, 7.°

$\therefore CA = FC$. N.° 76

Reemplazando FC por CA en la proporción, resulta:

$AM' : M'B = CA : CB$ (n.° 52, 8.°). L.C.D.D.

Discusión. ¿Qué sucede si los lados CA y CB son iguales?

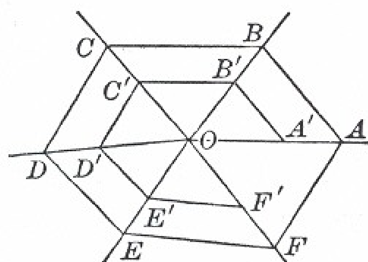
281. COROLARIO. *La bisectriz de un ángulo cualquiera de un triángulo y la del externo suplementario de éste dividen el lado opuesto armónicamente.*

EJERCICIO 44

1. En un triángulo ABC, $AB = 6,5$, $CA = 6$, $BC = 7$. Calcúlense los segmentos de AB determinados por la bisectriz del ángulo C.

2. En un triángulo ABC, $CA = 7,5$, $BC = 7$, $AB = 8$. Calcúlense los segmentos de CA determinados por la bisectriz del ángulo B.

3. Los lados de un triángulo son 12, 16, 20. Calcúlense los segmentos determinados en los lados por las tres bisectrices.



4. Si se trazan $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'E'$, $E'F'$ paralelas respectivamente a AB, BC, CD, DE, EF, y por F' se traza una paralela a FA, ¿pasará por A'?

5. Por un punto cualquiera O situado dentro del triángulo ABC se trazan OA, OB, OC, cuyos puntos medios respectivos son A', B', C'. Demuéstrese que $\angle CBA = \angle C'B'A'$.

6. Demuéstrese la proposición anterior suponiendo que O es exterior al triángulo.

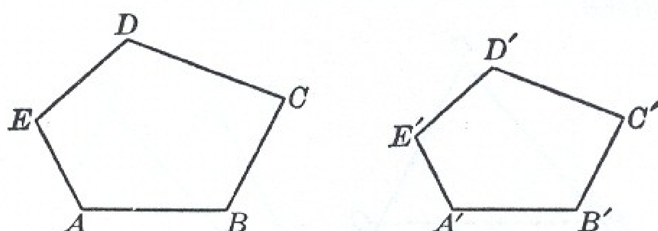
7. Por un punto O interior a un cuadrilátero $ABCD$ se trazan OA, OB, OC, OD, cuyos puntos medios respectivos son A', B', C', D'. Demuéstrese que $\angle CBA = \angle C'B'A'$.

8. Si un péndulo oscila alrededor de O, y corta dos paralelas en P y Q respectivamente, la razón $OP : OQ$ es constante.

9. Por un punto P se traza una recta que corta en X una recta dada. La recta PX se divide en Y de suerte que $PY : YX$ es constante. Hállese el lugar geométrico de Y para todos los puntos X.

10. En un triángulo ABC, se toman P y Q en CA y BC respectivamente de suerte que $AP : PC = BQ : QC$. Luégo se traza por A una paralela a PB, la cual corta la prolongación de CB en R. Demuéstrese que $CQ : CB = CR : CR$.

282. Polígonos semejantes. Llámanse *polígonos semejantes* aquellos cuyos ángulos son iguales respectivamente y cuyos lados respectivos son proporcionales.



Estos dos polígonos son semejantes si los ∡ A, B, C, D, E son iguales respectivamente a los A', B', C', D', E', y si además

$$AB:A'B' = BC:'BC' = CD:C'D' = DE:D'E' = EA:E'A'.$$

283. Líneas homólogas. En dos polígonos semejantes se llaman *líneas homólogas* las que están semejantemente dispuestas con respecto á los ángulos iguales.

En la figura anterior, AB es el homólogo de $A'B'$, CD el de $C'D'$, etc.

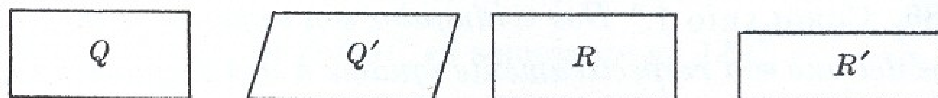
284. Razón de similitud. Llámase *razón de similitud* o *razón de semejanza* de dos polígonos semejantes la razón de dos lados homólogos cualesquiera.

Las dos condiciones necesarias y suficientes para que dos polígonos sean semejantes son:

1.ª *A cada ángulo de cada polígono debe corresponder en el otro un ángulo igual.*

2.ª *Los lados homólogos deben ser proporcionales.*

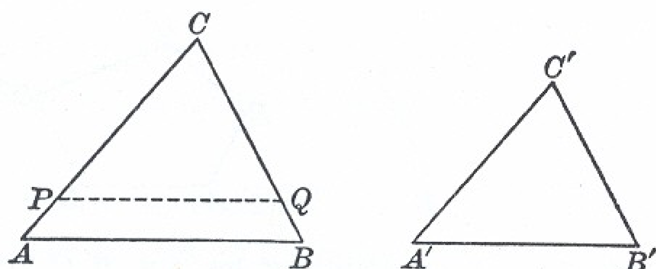
Por ejemplo, Q y Q' no son semejantes; pues, aunque los lados son proporcionales, los ángulos no son respectivamente iguales. Tampoco lo son R y R', porque, aunque los ángulos son respectivamente iguales, los lados no son proporcionales.



En los triángulos, cualquiera de las dos condiciones incluye la otra.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

285. *Si dos triángulos son mutuamente equiángulos, son semejantes.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos en que los ángulos A, B, C son respectivamente iguales a los A', B', C'.

Demostrar que los dos triángulos son semejantes.

Demostración. Puesto que se supone que los triángulos son mutuamente equiángulos, basta probar que

$$AB:A'B' = AC:A'C' = BC:B'C'. \qquad \text{N.° 282}$$

Colóquese el $\triangle A'B'C'$ sobre el ABC de suerte que el $\angle C'$ coincida con su igual C, y sea PQ la posición de $A'B'$.

Puesto que $\angle CPQ = \angle A$, Por hipót.

PQ es $\parallel$ a AB; N.° 103

$\therefore AC:PC = BC:QC$; N.° 274

o sea, $AC:A'C' = BC:B'C'$. N.° 52, 8.°

De igual manera, colocando el $\triangle A'B'C'$ sobre el ABC de modo que los $\measuredangle$ B' y B coincidan, se demuestra que

$$AB:A'B' = AC:A'C' = BC:B'C'. \qquad \text{N.° 52, 7.°}$$

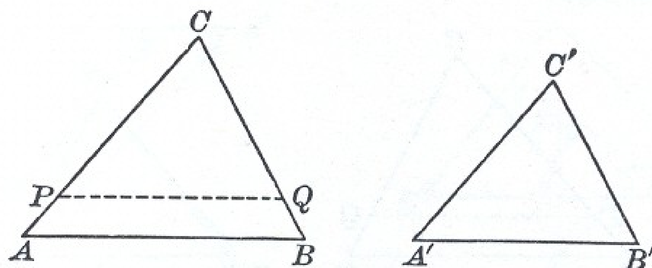
$\therefore$ los $\triangle$ ABC y $A'B'C'$ son semejantes (n.° 282). L.C.D.D.

286. COROLARIO 1.° *Dos triángulos son semejantes si dos ángulos del uno son respectivamente iguales a dos ángulos del otro.*

287. COROLARIO 2.° *Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen igual un ángulo agudo.*

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA

288. *Si dos triángulos tienen un ángulo igual comprendido entre lados proporcionales, los dos triángulos son semejantes.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos en que $\angle C = \angle C'$, y además $CA : C'A' = CB : C'B'$.

Demostrar que los $\triangle ABC$ *y* $A'B'C'$ *son semejantes.*

Demostración. Colóquese el $\triangle A'B'C'$ sobre el ABC de suerte que el $\angle C'$ coincida con su igual C. N.º 53, 5.º

Sea PQC la nueva posición del $\triangle A'B'C'$

Ahora bien, $$\frac{CA}{C'A'} = \frac{CB}{C'B'},$$ Por hipót.

o sea, $$\frac{CA}{CP} = \frac{CB}{CQ};$$ N.º 52, 8.º

de donde $$\frac{CA - CP}{CP} = \frac{CB - CQ}{CQ},$$ N.º 268

o sea, $$\frac{PA}{CP} = \frac{QB}{CQ};$$

$\therefore$ PQ es $\parallel$ a AB, N.º 276

y también $\angle CPQ = \angle A$, $\angle CQP = \angle B$; N.º 102

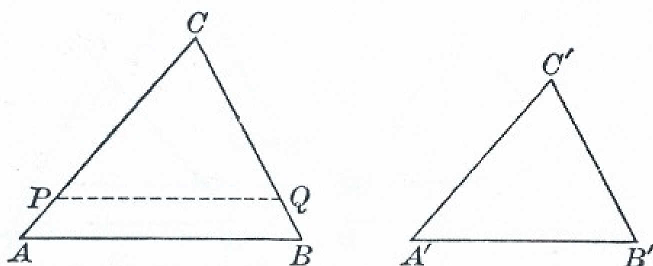
$\therefore$ el $\triangle PQC$ es semejante al ABC, N.º 285

y, puesto que $\triangle PQC = \triangle A'B'C'$,

el $\triangle A'B'C'$ es semejante al ABC. L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XV. TEOREMA

289. *Si los tres lados de un triángulo son respectivamente proporcionales a los de otro, los dos triángulos son semejantes.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos en que

$$AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A'.$$

Demostrar que los $\triangle ABC$ *y* $A'B'C'$ *son semejantes.*

Demostración. En CA tómese CP igual a $C'A'$; y en CB, CQ igual a $C'B'$.

Ahora bien, $CA : C'A' = BC : B'C'$; Por hipót.

además, $CP = C'A'$,

$CQ = C'B'$; Por constr.

$\therefore\ CA : CP = CB : CQ$. N.º 52, 8.º

Los $\triangle ABC$ y PQC tienen común el $\angle C$.

$\therefore$ los $\triangle ABC$ y PQC son semejantes; N.º 288

$\therefore\ CA : CP = AB : PQ$, N.º 282

o sea, $CA : C'A' = AB : PQ$. N.º 52, 8.º

También, $CA : C'A' = AB : A'B'$; Por hipót.

$\therefore\ AB : PQ = AB : A'B'$; N.º 52, 7.º

$\therefore\ PQ = A'B'$. N.º 263

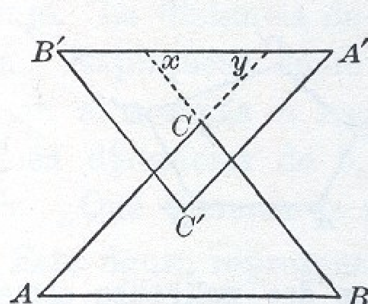
Por tanto, $\triangle PQC = \triangle A'B'C'$. N.º 80

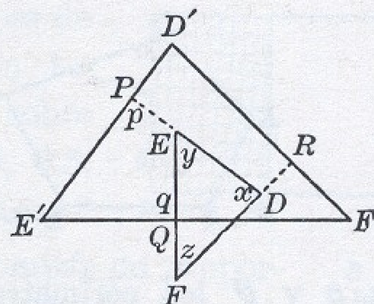
Como los $\triangle ABC$, PQC son semejantes, síguese que

los $\triangle ABC$ y $A'B'C'$ son semejantes. L C.D.D

Proposición XVI. Teorema

290. *Dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos o perpendiculares son semejantes.*





Sean *ABC, A'B'C'* dos triángulos que tienen sus lados respectivamente paralelos; y *DEF, D'E'F'* dos triángulos que tienen sus lados respectivamente perpendiculares.

Demostrar: 1.° *que los* $\triangle$ *ABC y A'B'C' son semejantes;*
2.° *que los* $\triangle$ *DEF y D'E'F' son semejantes.*

Demostración. 1.° Prolónguense BC y AC hasta $A'B'$.

$\angle B = \angle x, \ \angle B' = \angle x;$ N.os 100, 102

$\therefore \angle B = \angle B'.$ N.° 52, 7.°

Asímismo, $\angle A = \angle A'$

$\therefore$ los $\triangle$ ABC y $A'B'C'$ son semejantes. N.° 286

2.° Prolónguense DE y FD hasta sus intersecciones P, R con $D'E'$, $F'D'$.

Los $\angle$s p y q del cuadrilátero $E'QEP$ son rectos; Por hipót.

$\therefore$ los $\angle$s E' y PEQ son suplementarios. N.° 144

Además, los $\angle$s y y PEQ son suplementarios; N.° 43

$\therefore \angle y = \angle E'.$ N.° 58

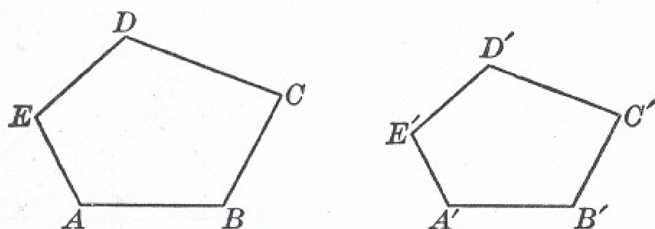
Asímismo, $\angle x = \angle D'.$

$\therefore$ los $\triangle$ DEF y $D'E'F'$ son semejantes (n.° 286). L.C.D.D.

Obsérvese que los lados paralelos o perpendiculares son lados homólogos.

Proposición XVII. Teorema

291. *Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos cualesquiera.*



Sean p y p' los perímetros de los dos polígonos semejantes *ABCDE*, *A'B'C'D'E'*.

Demostrar que $p : p' = AB : A'B'$.

Demostración. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}$. N.° 282

$$\therefore \frac{AB + BC + CD + DE + EA}{A'B' + B'C' + C'D' + D'E' + E'A'} = \frac{AB}{A'B'}, \quad \text{N.° 269}$$

o sea, $p : p' = AB : A'B'$. L.C.D.D.

EJERCICIO 45

1. Las alturas homólogas de dos triángulos semejantes son entre sí como los lados homólogos.

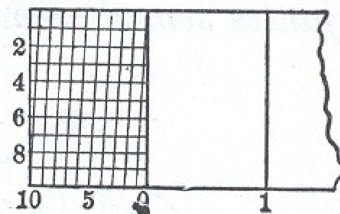
2. La base de un triángulo es de 15 m., y la altura, de 7 m. La base homóloga de un triángulo semejante al primero es de 3,75 m. Hállese la altura.

3. Si tres trasversales concurrentes cortan dos paralelas, los segmentos interceptados en las paralelas son proporcionales.

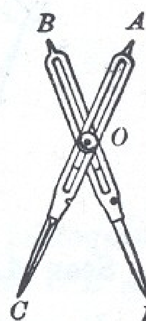
4. En el lado OX de un ángulo XOY se toma un punto cualquiera P. Por él se traza PQ perpendicular a OY. Demuéstrese que, para todas las posiciones de P, las relaciones $OP : PQ$ y $PQ : OQ$ son constantes.

5. En el plano de un terreno triangular cuyos lados son 75, 60 y 50 m. respectivamente, el mayor lado se hace 5 cm. ¿De qué longitud deben hacerse los otros dos?

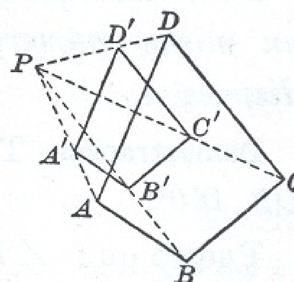
6. Esta figura representa una escala que se emplea a veces en dibujo. La distancia de 0 a 10 es de 10 mm. Explíquese cómo pueden tomarse en el compás o marcarse sobre una línea distancias de 5, 1, 0,9, 0,5, 1,5 mm. ¿Qué teorema se aplica aquí?



7. Esta figura representa un compás de proporción. Variando la posición del tornillo O a lo largo de las piernas, puede hacerse que las partes OA, OC y sus iguales correspondientes OB, OD estén en una relación dada cualquiera. Demuéstrese que los triángulos OAB, OCD son siempre semejantes. Si $OA = 6$ cm. y $OC = 12$ cm., ¿qué parte de CD es AB?



8. Sean P un punto cualquiera y $ABCD$ un polígono cualquiera. Tómese en PA un punto cualquiera A', y trácense $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$ paralelas respectivamente a AB, BC, CD. Trácese $D'A'$. ¿Son semejantes $ABCD$ y $A'B'C'D'$? ¿Por qué?



9. Si dos círculos son tangentes exteriormente, las cuerdas determinadas por dos rectas trazadas por el punto de contacto son proporcionales.

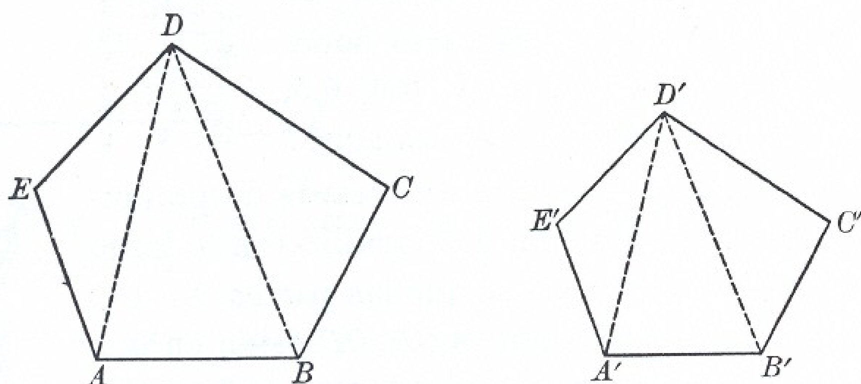
10. Si dos círculos son tangentes exteriormente, su tangente externa común es media proporcional entre los diámetros.

11. Por un punto A de una circunferencia se trazan dos cuerdas AB, AC, y el diámetro AD. La tangente en D corta las prolongaciones de AB y AC en E y F. Los triángulos ABC, AEF son semejantes.

12. Si AD, BE son dos alturas del triángulo ABC, los dos triángulos DEC y ABC son semejantes.

PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA

292. *Si dos polígonos son semejantes, se pueden descomponer en un mismo número de triángulos semejantes semejantemente dispuestos.*



Sean *ABCDE*, *A'B'C'D'E'* dos polígonos semejantes.

Demostrar que estos dos polígonos pueden descomponerse en un mismo número de triángulos semejantes semejantemente dispuestos.

Demostración. Trácense las diagonales homólogas DA, $D'A'$ y DB, $D'B'$.

Puesto que $\angle E = \angle E'$, y $DE : D'E' = EA : E'A'$, N.° 282

los $\triangle$ DEA, $D'E'A'$ son semejantes. N.° 288

Asímismo lo son los $\triangle$ DBC, $D'B'C'$.

Además, $\angle BAE = \angle B'A'E'$, N.° 282

$\angle DAE = \angle D'A'E'$; N.° 282

de donde, restando miembro a miembro,

$\angle BAD = \angle B'A'D'$. N.° 52, 1.°

Ahora bien, $DA : D'A' = EA : E'A'$, N.° 282

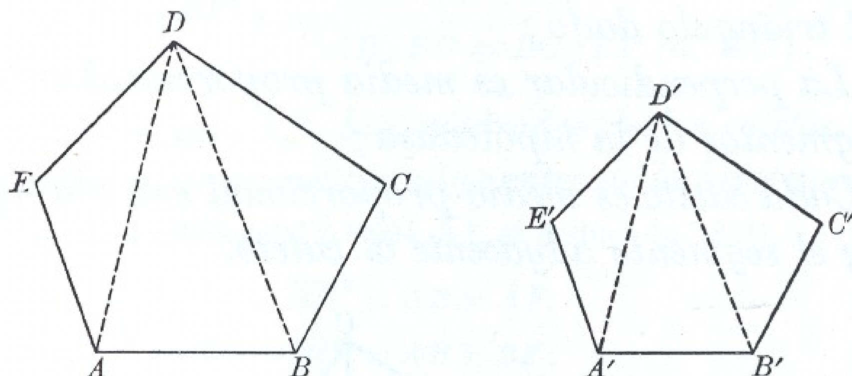
$AB : A'B' = EA : E'A'$; N.° 282

$\therefore DA : D'A' = AB : A'B'$. N.° 52, 7.°

$\therefore$ los $\triangle$ DAB, $D'A'B'$ son semejantes (n.° 288). L. C. D. D.

Proposición XIX. Teorema

293. *Si dos polígonos pueden dividirse en un mismo número de triángulos semejantes semejantemente dispuestos, los dos polígonos son semejantes.*



Sean *ABCDE, A'B'C'D'E'* dos polígonos en que los triángulos *DEA, DAB, DBC* son respectivamente semejantes a los *D'E'A', D'A'B', D'B'C'*, y están semejantemente dispuestos.

Demostrar que $ABCDE$ es semejante a $A'B'C'D'E'$.

Demostración. $\angle E = \angle E'$,

$\angle DAE = \angle D'A'E'$,

$\angle BAD = \angle B'A'D'$. N.° 282

Sumando: $\angle BAE = \angle B'A'E'$. N.° 52, 1.°

Análogamente,

$$\angle CBA = \angle C'B'A', \ \angle EDC = E'D'C'.$$

También, $\angle C = \angle C'$. N.° 282

Los dos polígonos son pues mutuamente equiángulos.

$$\frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'} = \frac{DA}{D'A'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{DB}{D'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}. \text{ N.° 282}$$

Así pues, los dos polígonos tienen sus ángulos respectivamente iguales, y sus lados homólogos son proporcionales.

Luego los dos polígonos son semejantes (n.° 282). L.C.D.D

Esta proposición es la recíproca de la XVIII.

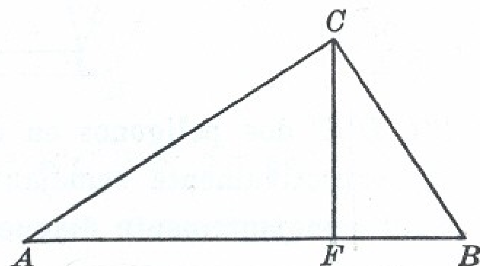
PROPOSICIÓN XX. TEOREMA

294. *Si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular a la hipotenusa,*

1.° *Los triángulos así formados son semejantes entre sí y al triángulo dado;*

2.° *La perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa;*

3.° *Cada cateto es medio proporcional entre la hipotenusa y el segmento adyacente al cateto.*



Sea *ABC* un triángulo rectángulo en que *CF* es perpendicular a la hipotenusa *AB*.

1.° *Demostrar que los tres triángulos BCA, CFA, BFC son semejantes.*

Demostración. El $\angle BAC$ es común a los △ rectángulos CFA, BCA; luego estos dos △ son semejantes. N.° 287

Puesto que el $\angle CBA$ es común a los △ rectángulos BFC, CBA, estos dos △ son semejantes. N.° 287

Puesto que los triángulos CFA, BFC son semejantes al BCA, sus ángulos son respectivamente iguales. N.° 282

Luego los △ CFA, BFC son semejantes (n.° 285). L.C.D.D.

2.° *Demostrar que* $AF : CF = CF : FB$.

Demostración. En los △ semejantes CFA, BFC,

$$AF : CF = CF : FB \text{ (n.° 282).} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

3. *Demostrar que* $AB : AC = AC : AF$

y que asímismo $AB : BC = BC : BF$.

Demostración. En los $\triangle$ semejantes BCA, CFA,

$$AB : AC = AC : AF, \qquad \text{N}^o. 282$$

y en los BCA, BFC,

$$AB : BC = BC : BF \text{ (n.}^o \text{ 282).} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

295. Corolario 1.° *Los cuadrados de los catetos son proporcionales a los segmentos adyacentes de la hipotenusa.*

De las proporciones del n.° 294, 3.°, se deduce (n.° 261)

$$\overline{AC}^2 = AB \times AF,$$

$$\overline{BC}^2 = AB \times BF;$$

de donde

$$\frac{\overline{AC}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{AB \times AF}{AB \times BF} = \frac{AF}{BF}. \qquad \text{N.}^o \text{ 52, 2.}^o$$

296. Corolario 2.° *El cuadrado de la hipotenusa es al cuadrado de un cateto como la hipotenusa es al segmento adyacente a ese cateto.*

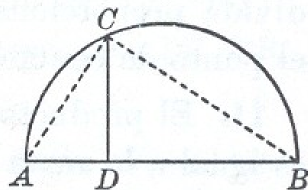
Se tiene:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AB} \times \overline{AB}, \qquad \text{Definición}$$

$$\overline{AC}^2 = AB \times AF; \qquad \text{N.}^o \text{ 295}$$

$$\therefore \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{AB \times AB}{AB \times AF} = \frac{AB}{AF}. \qquad \text{N.}^o \text{ 52, 2.}^o$$

297. Corolario 3.° *La perpendicular bajada de un punto cualquiera de una circunferencia a un diámetro es media proporcional entre los dos segmentos del diámetro.*



298. Corolario 4.° *Si de un punto cualquiera de una circunferencia se traza una perpendicular a un diámetro, la cuerda que va de ese punto a un extremo del diámetro es media proporcional entre el diámetro y el segmento adyacente a la cuerda.*

EJERCICIO 46

1. Los perímetros de dos polígonos semejantes son 18 y 14 m. Si uno de los lados del uno es de 3 m., ¿cuál es el largo de su homólogo en el otro?

2. En dos triángulos semejantes ABC, $A'B'C'$, $AB = 6$ m., $BC = 7$ m., $CA = 8$ m., $A'B' = 9$ m. Calcúlense $B'C'$, $C'A'$.

3. Las bases homólogas de dos triángulos semejantes son 11 y 13 cm. Si la altura del uno es 6 cm., ¿cuál es la del otro?

4. El perímetro de un triángulo equilátero es 51 cm. Hállese el lado de un triángulo equilátero cuya altura sea la mitad de la del anterior.

5. Los lados de un polígono son 2, 2,5, 3,25, 3 y 5 cm. Hállese el perímetro de uno semejante cuyo lado mayor es de 7 cm.

6. El perímetro de un triángulo isósceles es 13, y la relación entre uno de los lados iguales y la base es $1\frac{2}{3}$. Hállense los tres lados.

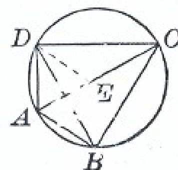
7. El perímetro de un rectángulo es 48, y dos lados adyacentes están en la relación de 5 a 7. Hállense los lados.

8. Si se dibuja en escala de 1:100.000 un terreno rectangular de 40 km. de largo y 15 de ancho, ¿cuáles son las longitudes de los lados en el plano?

9. Dos círculos son tangentes en P. Por P se trazan rectas que encuentran una de las circunferencias en A, B, C, y la otra en A', B', C'. Los triángulos ABC, $A'B'C'$ son semejantes.

10. Si dos círculos son tangentes interiormente, el menor divide proporcionalmente las cuerdas del mayor trazadas por el punto de contacto.

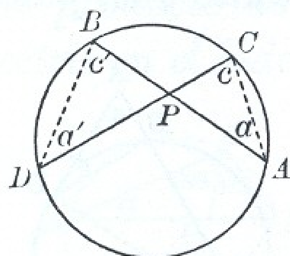
11. El producto de las diagonales de un cuadrilátero inscrito es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.



Trácese DE de suerte que $\angle EDC = \angle ADB$. Los $\triangle ABD$ y ECD, y los BCD y AED, son semejantes.

PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA

299. *Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el producto de los dos segmentos de la una es igual al de los dos de la otra.*



Sean AB, CD dos cuerdas que se cortan en P.

Demostrar que $PA \times PB = PC \times PD$.

Demostración. Trácense AC, BD.

Ahora bien, $\angle a = \angle a'$. N.º 214

(*Cada uno de estos ángulos tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco BC.*)

Asímismo, $\angle c = \angle c'$; N.º 214

$\therefore$ los $\triangle$ CPA, BPD son semejantes; N.º 286

$\therefore PA : PD = PC : PB$. N.º 282

$\therefore PA \times PB = PC \times PD$ (n.º 261). L.C.D.D.

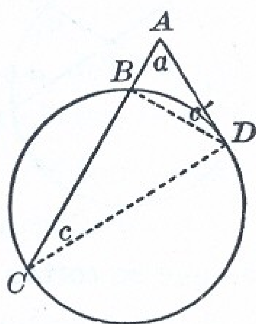
300. COROLARIO. *Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, los dos segmentos que comprenden uno cualquiera de los cuatro ángulos así formados son inversamente proporcionales a los que comprenden el ángulo opuesto por el vértice al primero.*

Esto significa que, por ejemplo, la razón $PA : PD$ es igual a $PC : PB$, como se ve en el número anterior.

301. Secante a un círculo. Cuando se habla de la *secante* trazada a un círculo de un punto exterior, se entiende de ordinario la parte de la secante comprendida entre ese punto y el *segundo* en que la secante encuentra la circunferencia.

PROPOSICIÓN XXII. TEOREMA

302. *Si de un punto exterior a un círculo se trazan a él una secante y una tangente, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.*



Sean *AC* una secante y *AD* una tangente trazadas por *A* al círculo *CBD*.

Demostrar que $AC : AD = AD : AB.$

Demostración. Trácense DC, DB.

Ahora bien, $\angle c$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco BD, N.° 214

$\angle c'$ tiene por medida $\frac{1}{2}$ arco BD; N.° 220

$$\therefore \angle c = \angle c'.$$

En los $\triangle\!\!\triangle ADC$, ABD,

$$\angle a = \angle a, \ \angle c = \angle c';$$

$\therefore$ estos triángulos son semejantes. N.° 286

$\therefore AC : AD = AD : AB$ (n.° 282). L.C.D.D.

303. COROLARIO. *Si de un punto exterior a un círculo se traza a él una secante, el producto de la secante y su parte externa es constante.*

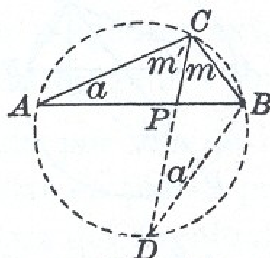
Se tiene: $AC : AD = AD : AB$; N.° 302

$\therefore AC \times AB = \overline{AD}^2.$ N.° 261

Puesto que AD es constante (n.° 192), $AC \times AB$ también lo es.

Proposición XXIII. Teorema

304. *El cuadrado de la bisectriz de un ángulo cualquiera de un triángulo es igual al producto de los lados del ángulo menos el producto de los segmentos determinados por la bisectriz en el lado opuesto.*



Sea CP la bisectriz del ángulo C del triángulo ABC.

Demostrar que $\overline{CP}^2 = CA \times BC - AP \times PB$.

Demostración. Sea $BCAD$ el ⊙ circunscrito al $\triangle ABC$. N.° 240

Prolónguese CP hasta D, y trácese BD.

En los ⧋ BCD, PCA, $\angle m = \angle m'$, Por hipót.

$\angle a' = \angle a$. N.° 214

(Estos dos ángulos tienen por medida $\frac{1}{2}$ arco BC.)

∴ los ⧋ BCD, PCA son semejantes; N.° 286

∴ $CD : CA = BC : CP$; N.° 282

∴ $CA \times BC = CD \times CP$ N.° 261

$= (CP + PD) \times \overline{CP}$ N.° 52, 8.°

$= \overline{CP}^2 + CP \times PD$.

Ahora bien, $CP \times PD = AP \times PB$; N.° 299

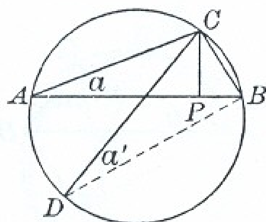
∴ $CA \times BC = \overline{CP}^2 + AP \times PB$; N.° 52, 8.°

de donde $\overline{CP}^2 = CA \times BC - AP \times PB$ (n.° 52, 1.°). L. C. D. D.

Este teorema sirve para calcular las bisectrices de los ángulos de un triángulo cuando se conocen los lados. Sin embargo, no es de aplicación frecuente, y puede suprimirse si se quiere.

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA

305. *En todo triángulo, el producto de dos lados cualesquiera es igual al producto del diámetro del círculo circunscrito por la altura del triángulo, tomando el tercer lado por base.*



Sean *ACBD* el círculo circunscrito al triángulo *ABC*, *CD* el diámetro del círculo, *AB* la base del triángulo, y *CP* la altura correspondiente a la base *AB*.

Demostrar que $CA \times BC = CD \times CP$.

Demostración. Trácese BD.

En los $\triangle APC$, DBC,

$\angle CPA = 1$ rt., Por hipót.

$\angle CBD = 1$ rt., N.° 215

$\angle a = \angle a'$. N.° 214

(*Ambos tienen por medida* $\frac{1}{2}$ *arco* BC.)

$\therefore$ los $\triangle APC$ y DBC son semejantes; N.° 287

$\therefore CA : CD = CP : BC$; N.° 282

de donde

$CA \times BC = CD \times CP$ (n.° 261). L. C. D. D

Como el anterior, este teorema tiene poca aplicación, y no entra para nada en las demostraciones subsiguientes. Puede pues suprimirse si se desea. Los dos teoremas son, sin embargo, ejercicios muy instructivos en la teoría de las proporciones y de los triángulos semejantes, y así se aconseja al alumno que por lo menos los lea.

EJERCICIO 47

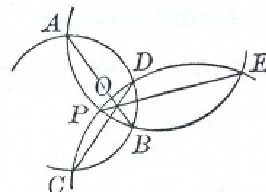
1. Las tangentes trazadas a dos círculos que se cortan de cualquier punto tomado en la prolongación de su cuerda común son iguales.

2. La cuerda común prolongada de dos círculos que se cortan bisecta sus tangentes comunes.

3. Si dos círculos son tangentes exteriormente, su tangente interior común bisecta las tangentes comunes exteriores.

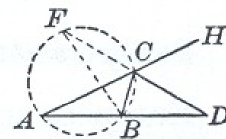
4. Si una recta trazada por uno de los vértices de un triángulo divide el lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos, la recta es la bisectriz del ángulo de ese vértice.

5. Las cuerdas comunes a tres círculos que se cortan son concurrentes.



Supóngase que AB y CD se cortan en O. Trácese EO, y supóngase que su prolongación encuentra las mismas circunferencias en dos puntos P y Q. Demuéstrese que $OP = OQ$ (n.º 299), y que por tanto P y Q coinciden.

6. El cuadrado de la bisectriz de un ángulo externo de un triángulo es igual al producto de los segmentos que la bisectriz determina en el lado opuesto, menos el producto de los otros dos lados.



Sea CD la bisectriz del $\angle BCH$. Demuéstrese que los $\triangle ADC$, FBC son semejantes. (Aplíquese el n.º 303.)

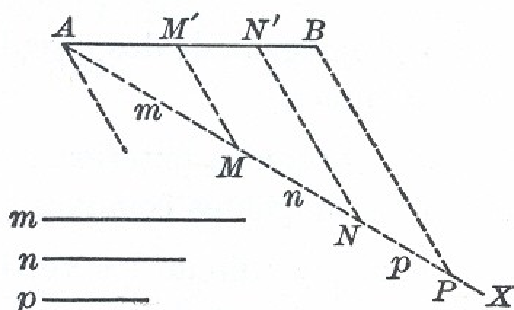
7. Si la línea de los centros de dos circunferencias las corta consecutivamente en A, B, C, D, y encuentra en P una de sus tangentes externas comunes, $PA \times PD = PB \times PC$.

8. Por el punto P del ejercicio anterior se traza una secante que corta las circunferencias en E, F, G, H. Demuéstrese que $PE \times PH = PF \times PG$.

Trácense radios a los puntos de contacto, y a E, F, G, H; y también ⊥s a PH de los centros de los ⓢ. Resultan varios triángulos semejantes.

PROPOSICIÓN XXV. PROBLEMA

306. *Dividir una recta dada en partes proporcionales a otras rectas dadas.*



Sean *AB, m, n* y *p* las rectas dadas.

Se desea dividir AB en partes proporcionales a m, n, p.

Construcción. Trácese una recta cualquiera AX.

En AX háganse $AM = m$, $MN = n$, $NP = p$.

Trácese BP.

Por N trácese $NN' \parallel$ a PB,

y por M, $MM' \parallel$ a PB. N.° 233

M' y N' son los puntos de división buscados.

Demostración. Trácese por A una $\parallel$ a PB. N.° 233

Entonces se tendrán las igualdades,

$$\frac{AM'}{AM} = \frac{M'N'}{MN} = \frac{N'B}{NP}, \qquad \text{N.° 275}$$

o, reemplazando AM, MN, NP por m, n, p,

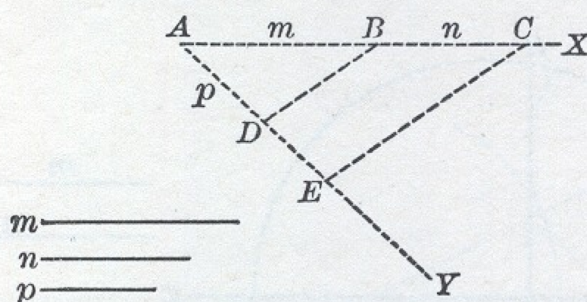
$$\frac{AM'}{m} = \frac{M'N'}{n} = \frac{N'B}{p}, \qquad \text{N.° 52, 8.°}$$

que son las relaciones pedidas. L.C.D.D.

El mismo método se aplica evidentemente a la división de una recta en cualquier otro número de partes proporcionales a rectas dadas

PROPOSICIÓN XXVI. PROBLEMA

307. *Hallar la cuarta proporcional de tres rectas dadas.*



Sean m, n, p las tres rectas dadas.

Se desea hallar la cuarta proporcional de m, n *y* p.

Construcción. Trácense dos rectas concurrentes cualesquiera AX, AY.

En AX tómense $AB = m$, $BC = n$;

y en AY tómese $AD = p$.

Trácese BD.

Por C trácese $CE \parallel$ a BD. N.º 233

DE es la cuarta proporcional buscada.

Demostración. Se tiene la proporción

$AB : BC = AD : DE$. N.º 273

Reemplazando AB, BC, AD por sus iguales m, n, p, respectivamente, resulta:

$m : n = p : DE$. N.º 52, 8.º

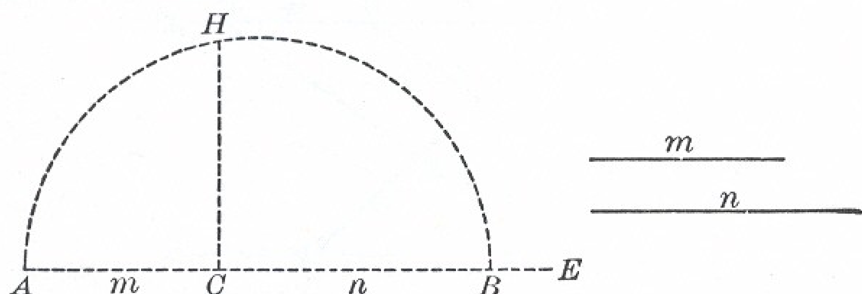
Así pues, DE es la cuarta proporcional de las tres rectas dadas m, n, p. L.C.D.D.

308. COROLARIO. *Hallar la tercera proporcional de dos rectas dadas.*

Éste es un caso especial del anterior. Aquí las rectas dadas son m, n, n en lugar de m, n, p.

PROPOSICIÓN XXVII. PROBLEMA

309. *Hallar la media proporcional de dos rectas dadas.*



Sean m **y** n **las dos rectas dadas.**

Se desea hallar la media proporcional de m *y* n.

Construcción. Trácese una recta cualquiera AE, y en ella tómense, a partir de un punto cualquiera A, los segmentos AC y CB iguales respectivamente a las dos rectas dadas m y n.

Sobre AB como diámetro descríbase una semicircunferencia.

Levántese en C una perpendicular a AB, y sea H su intersección con la semicircunferencia. N.º 228

La recta CH es la media proporcional buscada.

Demostración. Se tiene la proporción

$$AC:CH=CH:CB,$$ N.º 297

o, reemplazando AC y CB por sus iguales m y n,

$$m:CH=CH:n.$$ L. C. D. D.

310. Media y extrema razón. Dícese que una recta está dividida *en media y extrema razón*, o *en medio y extremo*, cuando está dividida en dos segmentos tales que el uno es medio proporcional entre la recta entera y el otro segmento.

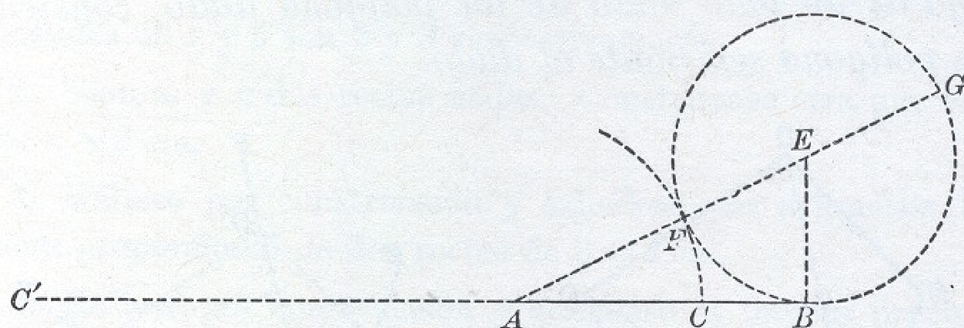
La relación entre la recta y los dos segmentos puede expresarse algébricamente así:

$$a:x=x:a-x, \text{ y } x^2=a(a-x),$$

representando por a la recta entera y por x uno de los dos segmentos.

PROPOSICIÓN XXVIII. PROBLEMA

311. *Dividir una recta dada en media y extrema razón.*



Sea AB **la recta dada.**

Se desea dividir AB *en media y extrema razón.*

Construcción. Trácese por el extremo B la perpendicular BE igual a $\frac{1}{2}AB$. N.° 228

Haciendo centro en el punto E, trácese una circunferencia de radio EB.

Trácese la secante $AFEG$.

Háganse $AC = AF$, y, en la prolongación de BA, $AC' = AG$.

AB queda dividida interiormente en C, y exteriormente en C', en media y extrema razón.

Demostración. $AG : AB = AB : AF$. N.° 302

Luego (n.° 268)

$AG - AB : AB$

$= AB - AF : AF;$

$\therefore AG - FG : AB$

$= AB - AC : AC;$

$\therefore AC : AB = CB : AC;$

$\therefore AB : AC = AC : CB,$

según el n.° 266. L.C.D.D.

$AB : AG = AF : AB;$ N.° 266

$\therefore AB + AG : AG$

$= AF + AB : AB;$

$\therefore AB + AC' : AC'$

$= AF + FG : AB;$

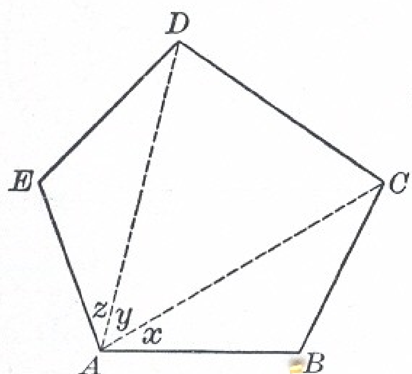
$\therefore C'B : AC' = AC' : AB;$

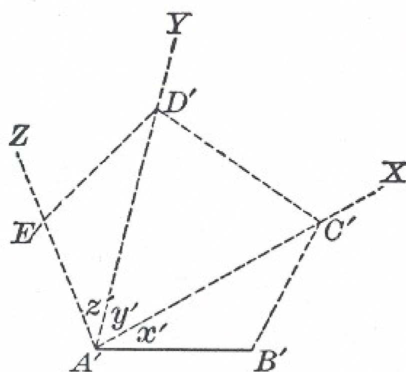
$\therefore AB : AC' = AC' : C'B,$

según los n.ºs 261, 264. L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XXIX. PROBLEMA

312. *Sobre una recta dada, considerada como homóloga de un lado dado de un polígono dado, construír un polígono semejante al dado.*





Sea $A'B'$ una recta considerada como lado homólogo del AB del polígono $ABCDE$.

Se desea construír sobre $A'B'$ un polígono semejante a $ABCDE$.

Construcción. Trácense las diagonales AD, AC.

Por A' trácense $A'X$, $A'Y$, $A'Z$ que formen ángulos x', y', z' iguales respectivamente a x, y, z. N.º 232

Por B' trácese una recta tal que $\angle B'$ sea igual a $\angle B$. Sea C' su intersección con $A'X$.

Por C' trácese una recta tal que $\angle D'C'B'$ sea igual a $\angle DCB$. Sea D' su intersección con $A'Y$.

Por D' trácese una recta tal que $\angle E'D'C'$ sea igual a $\angle EDC$. Sea E' su intersección con $A'Z$.

El polígono $A'B'C'D'E'$ determinado por estas rectas es el polígono buscado.

Demostración. Los $\triangle ABC$ y $A'B'C'$, ACD y $A'C'D'$, ADE y $A'D'E'$ son semejantes. N.º 286

Luego los dos polígonos son semejantes (n.º 293). L.C.D.D.

EJERCICIO 48

1. Sean a y b dos rectas dadas. Constrúyase una recta que represente $\sqrt{ab}$. Aplíquese la construcción al caso en que las longitudes de a y b son 2 y 3 respectivamente.

2. Sean m y n dos rectas dadas. Constrúyase otra que sea igual a $\sqrt{2\,mn}$.

3. Hállese por construcción y calcúlese por aritmética la tercera proporcional de dos rectas de 3 y 4 cm.

4. Hállese por construcción y calcúlese la tercera proporcional de dos rectas de 8 y 6 cm.

5. Hállese por construcción y también por el cálculo la cuarta proporcional de tres rectas de 3,7, 6 y 6,7 cm.

6. Hállese por construcción y por el cálculo la media proporcional de dos rectas de 3,6 y 8,1 cm.

7. Hállese $\sqrt{5}$ por construcción. Mídase la recta así obtenida, y véase si el resultado es aproximadamente el que da el cálculo.

8. Un mapa está dibujado según escala de 2 mm. por miriámetro. ¿Cuál es la distancia real de dos puntos que en el mapa distan 28,4 mm.?

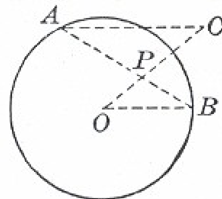
9. Constrúyase y calcúlese la tercera proporcional de dos rectas de 2,8 cm. y 5,5 cm.

10. Divídase una recta de 5 cm. en medio y extremo. Mídanse los segmentos y verifíquense los resultados aproximadamente por el cálculo.

11. Divídase una recta de 85 mm. en medio y extremo Mídanse los segmentos y verifíquense los resultados aproximadamente por el cálculo.

12. Divídase una recta de 40 mm. en medio y extremo. Mídanse los segmentos y verifíquense los resultados aproximadamente por el cálculo.

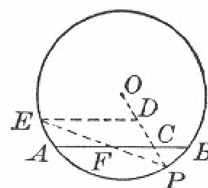
13. Por un punto P interior a un círculo, trazar una cuerda AB tal que $AP:BP$ sea igual a la razón dada $m:n$.



Trácese OPC de suerte que $OP:PC = n:m$, y luégo CA igual a la cuarta proporcional de n, m y el radio.

14. Trazar dos rectas que formen un ángulo de 60°, y todos los círculos de 15 mm. de radio tangentes a la vez a las dos rectas.

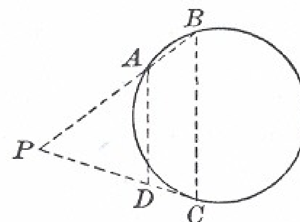
15. Por un punto P del arco APB, trazar una cuerda cuyo punto medio quede en la AB.



Tómese en el radio OP la distancia $CD = CP$. Trácese $DE \parallel$ a BA.

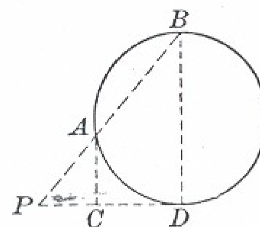
16. Construír dos círculos de 15 y 30 mm. de radio respectivamente y tangentes entre sí exteriormente, y luégo otro que sea tangente a ambos y los encierre, y cuyo radio sea de 90 mm.

17. Por un punto P exterior a un círculo, trazar una secante PAB tal que $PA:AB = m:n$, siendo m y n dos rectas dadas.



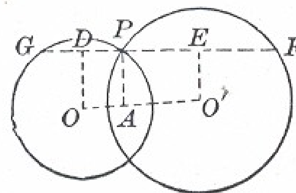
Trácese la tangente PC. Háganse $PD:DC = m:n$, y $PA:PC = PD:PA$.

18. Por un punto P exterior a un círculo, trazar una secante PAB tal que $\overline{AB}^2 = PA \times PB$.



19. Dado un triángulo ABC, describir una circunferencia que sea tangente a AB en A y pase por C.

20. Trazar por uno de los puntos de intersección de dos circunferencias una recta tal que las dos cuerdas que determine estén en la razón dada $m:n$.

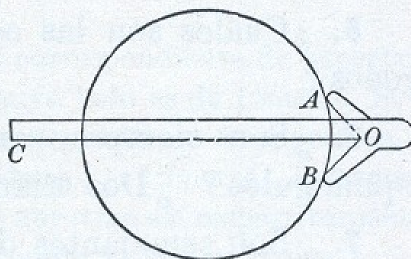


21. Por un punto distante 1 cm. del centro de un círculo de 3 cm. de radio se trazan cuerdas. ¿Cuál es el producto de los dos segmentos de cada cuerda?

22. Una cuerda AB de 3 cm. se prolonga por B hasta P, de suerte que $BP = 6$ cm. Determínese la longitud de la tangente trazada por P.

23. Las rectas AB, CD se cortan en O. ¿Cómo puede averiguarse, midiendo OA, OB, OC, OD, si A, B, C, D están sobre una circunferencia?

24. Esta figura representa un instrumento empleado para determinar el centro de placas circulares y secciones rectas de la misma forma. La regla OC bisecta el ángulo AOB, y $AO = OB$. Demuéstrese que, si A y B se apoyan en la circunferencia, OC pasa por el centro, el cual puede determinarse trazando dos rectas.



25. Si tres círculos son tangentes exteriormente, las tangentes trazadas por los puntos de contacto pasan por el centro del círculo inscrito en el triángulo formado por las líneas de los centros.

26. ABC es un triángulo isósceles rectángulo en C, y $AC = 10$ cm. Haciendo centro en A se describe un círculo de 5 cm. de radio. Describir un círculo tangente al primero y al cateto BC en B.

27. Hállese el centro de un círculo de 15 mm. de radio tangente interiormente á otro de 60 mm. de radio, y también a un diámetro dado del último.

28. Inscribir en un círculo dado un triángulo semejante a un triángulo dado.

29. Trazar dos rectas, conociendo su suma y la razón de la una a la otra.

EJERCICIO 49

Cuestionario de repaso

1. Defínanse *razón* y *proporción.*

2. Dada la proporción $a:b=c:d$, escríbanse otras cuatro que contengan a, b, c y d.

3. Si $a:b=c:d$, ¿es siempre cierto que $a+1:b+1=c:d$? ¿Puede ser esto cierto?

4. ¿Qué es *división armónica* de una recta? ¿Qué bisectrices de los ángulos de un triángulo dividen uno de los lados, y cuál, armónicamente?

5. ¿Cuáles son las condiciones de semejanza de dos polígonos?

6. ¿Son siempre semejantes dos polígonos mutuamente equiángulos? ¿Dos triángulos?

7. ¿Son semejantes dos triángulos cuyos lados son proporcionales? ¿Lo son siempre dos polígonos?

8. ¿Son semejantes dos triángulos cuyos lados son respectivamente paralelos? ¿Lo son siempre dos polígonos?

9. ¿Son semejantes dos triángulos cuyos lados son respectivamente perpendiculares? ¿Dos polígonos?

10. ¿A qué son proporcionales los perímetros de dos polígonos semejantes? Dénse dos respuestas.

11. Enúnciense tres teoremas relativos a la perpendicular trazada a la hipotenusa por el vértice del ángulo opuesto.

12. Si dos secantes se cortan dentro o fuera de un círculo o en la circunferencia, ¿a qué propiedad geométrica dan lugar?

13. Dígase cómo puede dividirse una recta dada en siete partes iguales.

14. Explíquese el modo de hallar por construcción la raíz cuadrada de 7.

LIBRO IV

ÁREA DE LOS POLÍGONOS

313. Unidad de superficie. Llámase *unidad de superficie,* ó *unidad superficial,* la superficie de una figura tomada como unidad para medir la superficie de otras. Por lo común, la unidad de superficie es la superficie de un cuadrado cuyo lado es igual a la unidad de longitud.

Si la unidad de longitud es el metro, la correspondiente de superficie es el *metro cuadrado*, que es un cuadrado cuyo lado es de 1 metro. Si la unidad de longitud es el centímetro, la correspondiente de superficie, el *centímetro cuadrado*, es un cuadrado cuyo lado es 1 centímetro. Las expresiones *metro cuadrado, centímetro cuadrado* se abrevian así respectivamente: $m.^2$, $cm.^2$, o así: *m.c.*, *cm.c.* Cosa análoga se aplica a otras unidades.

314. Área de una superficie. Llámase *área* de una superficie la medida de esa superficie en unidades superficiales.

Cuando se dice, por ejemplo, que el área de un cuarto es de 30 m.^{2}, quiere decirse que su superficie contiene 30 veces la de 1 m.^{2}

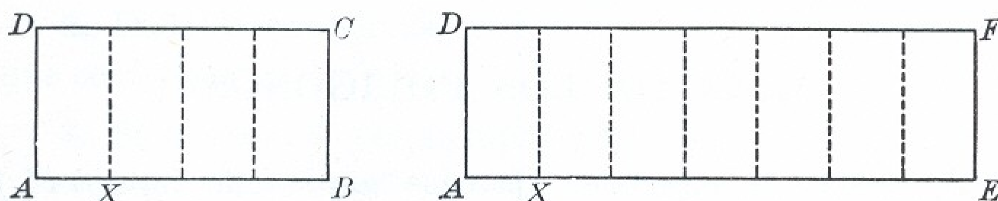
Las áreas se obtienen siempre multiplicando las longitudes de dos líneas. Si estas longitudes se expresan en metros, el producto da el área en metros cuadrados; si en centímetros, en centímetros cuadrados; y así de otras unidades.

315. Figuras equivalentes. Llámanse figuras *equivalentes* las que tienen una misma área.

Es claro que dos figuras iguales son también equivalentes. Pero dos figuras pueden ser equivalentes sin ser iguales. Un triángulo, por ejemplo, puede ser equivalente a un rectángulo o a un círculo. Algunos autores emplean algún signo especial, como ≎, para indicar equivalencia. Sin embargo, el signo igual puede emplearse para el mismo objeto, pues las circunstancias dan siempre a conocer de qué se trata. Cuando se trata de áreas, el nombre de una figura se refiere al área.

Proposición I. Teorema

316. *Dos rectángulos de una misma altura son entre sí como sus bases.*



Sean AC, AF dos rectángulos de igual altura AD.

Demostrar que $\square AC : \square AF = AB : AE$.

Caso 1.° *Cuando AB y AE son conmensurables.*

Demostración. Sea AX una medida común de AB y AE, y supóngase que AB y AE la contienen m y n veces respectivamente.

Entonces se tendrá: $AB : AE = m : n$.

Divídanse AB y AE en partes iguales a AX, y en los puntos de división levántense $\perp$s.

Estas $\perp$s son $\perp$s a DC y DF, N.° 97

y son además iguales. N.° 128

Puesto que a cada división corresponde un rectángulo,

$\square AC$ queda dividido en m rectángulos,

y asímismo $\square AF$ queda dividido en n rectángulos.

Todos estos rectángulos son iguales, pues tienen bases iguales y alturas iguales; N.° 133

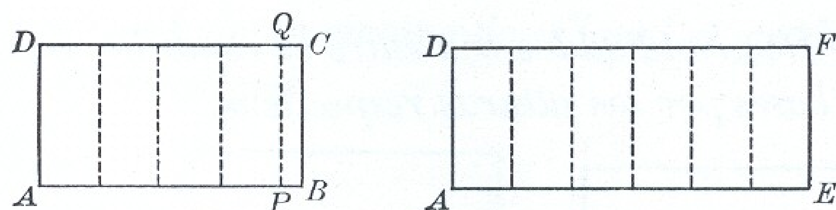
$$\therefore \square AC : \square AF = m : n,$$

y, puesto que $m : n = AB : AE$,

$\square AC : \square AF = AB : AE$ (n.° 52, 7.°). L.C.D.D

Para los fines prácticos, en que las dimensiones se expresan aproximadamente en números conmensurables, la demostración anterior basta Sin embargo, el rigor geométrico exige que se trate el otro caso.

Caso 2.° *Cuando AB y AE son inconmensurables.*



Demostración. Divídase AE en un número cualquiera de partes iguales, y tómense consecutivamente sobre AB tantas de ellas como sea posible.

Puesto que AB y AE son inconmensurables, habrá en AB un residuo PB, menor que una de las partes. Trácese $PQ \perp$ a AB.

$$\square AQ : \square AF = AP : AE. \qquad \text{Caso 1.°}$$

Aumentando el número de partes iguales en que se divide AE, la longitud de cada parte se disminuye, y por tanto PB puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea.

Así pues PB tiende hacia el límite cero a medida que se aumenta el número de partes, y al mismo tiempo $\square PC$ tiende hacia cero.

Por tanto AP tiende hacia el límite AB, y $\square AQ$ tiende hacia el límite $\square AC$. Luego

$$\text{la variable } \frac{AP}{AE} \text{ tiende hacia } \frac{AB}{AE},$$

$$\text{la variable } \frac{\square AQ}{\square AF} \text{ tiende hacia } \frac{\square AC}{\square AF}.$$

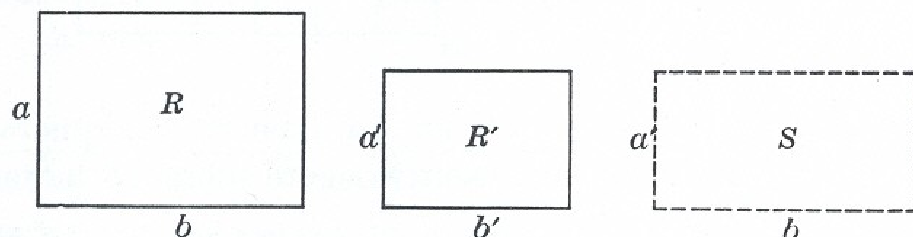
Pero $\dfrac{AP}{AE}$ permanece siempre igual a $\dfrac{\square AQ}{\square AF}$ cuando AP tiende hacia el límite AB; luego

$$\frac{\square AC}{\square AF} = \frac{AB}{AE} \text{ (n.° 207).} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

317. Corolario. *Dos rectángulos de una misma base son entre sí como sus alturas.*

PROPOSICIÓN II. TEOREMA

318. *Dos rectángulos son entre sí como los productos de las bases por las alturas respectivas.*



Sean R, R' dos rectángulos en que los valores numéricos de las bases y alturas son b y b', a y a' respectivamente.

Demostrar que $R : R' = ab : a'b'$.

Demostración. Constrúyase el rectángulo S de base b y altura a'.

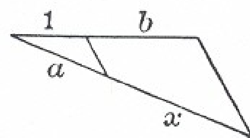
Entonces, $$\frac{R}{S} = \frac{a}{a'},$$ N.° 317

$$\frac{S}{R'} = \frac{b}{b'}.$$ N.° 316

Puesto que R, R', S' representan áreas, o sea valores numéricos, estas dos proporciones pueden multiplicarse miembro a miembro (n.° 272), lo que da

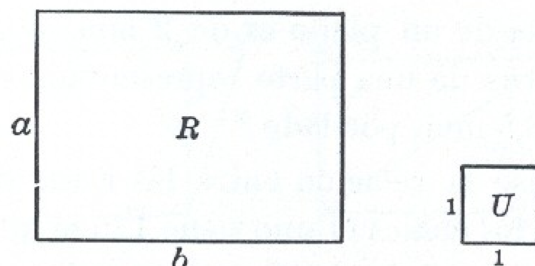
$$\frac{R}{R'} = \frac{ab}{a'b'}.$$ L.C.D.D.

319. Producto de rectas. Cuando se habla del producto de las rectas a y b se trata del producto de los números que expresan los valores numéricos de estas rectas. Puede, sin embargo, concebirse una recta como el producto de otras dos, si se cambia la definición de la multiplicación. Así, en esta figura, en que dos trasversales concurrentes cortan dos paralelas, se tiene: $1 : a = b : x$, $x = ab$. Del mismo modo puede hallarse xc, o sea, el producto abc de tres rectas a, b, c



Proposición III. Teorema

320. *El área de un rectángulo es igual al producto de la base por la altura.*



Sea R un rectángulo en que la base y la altura están numéricamente expresadas por b y a respectivamente.

Demostrar que $\quad$ *área* $R = \text{ab}$.

Demostración. Sea U la unidad de superficie. N.° 313

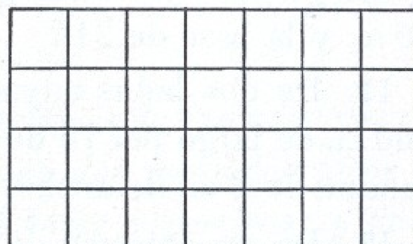
Entonces se tendrá:

$$\frac{R}{U} = \frac{ab}{1 \times 1} = ab. \qquad \text{N.° 318}$$

Ahora bíen, $\frac{R}{U}$ expresa el número de unidades superficiales contenidas en R, o sea el área de R. Luego

$$\text{área } R = ab. \qquad \text{L.C.D.D.}$$

321. Ejemplo. Cuando la base y la altura contienen la unidad de longitud un número exacto de veces, esta proposición puede hacerse evidente a la vista dividiendo el rectángulo en cuadrados iguales a la unidad superficial.



Por ejemplo, si la base contiene 7 y la altura 4 unidades lineales, el rectángulo puede dividirse en 28 cuadrados iguales. Hácese esto dividiendo la base en 7 partes iguales y la altura en 4, y trazando paralelas a los lados por los puntos de división, como se ve en la figura. Según queda dicho, en la práctica los lados se suponen siempre conmensurables.

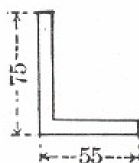
EJERCICIO 50

1. El perímetro de un rectángulo y el de un cuadrado son de 144 m., y el largo del rectángulo es 5 veces el ancho. Compárense las dos áreas.

2. Si la escala de un plano es de 2 mm. por km., ¿cuál es el área en hectáreas de una parte representada en el mapa por un cuadrado de 3,5 mm. por lado?

3. Determínese la relación entre las áreas de dos terrenos rectangulares de los cuales el uno tiene 125 m. de largo y 20 de ancho, y el otro 7 y 3,5 decámetros, respectivamente.

4. Determínese el área de una acera de 1,5 m. de ancho que rodea un espacio rectangular de 15 metros de largo por 10 de ancho. Hágase un dibujo según escala.



5. Hállese el área de la sección del hierro en ángulo aquí representado. Las dimensiones indicadas están en milímetros. El espesor es de 8 mm.

6. ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de 2,5 hectáreas?

7. Una máquina de pulir hierro pule en 1 min. una tira de 12 cm. de ancho y 5 m. de largo. ¿En cuánto tiempo pulirá una plancha de 2 m. de ancho y 8 de largo?

8. ¿Cuántas baldosas, cada una de 20 cm. en cuadro, se necesitan para cubrir un piso de 7,4 m. de largo por 4,8 de ancho?

9. ¿Cuáles son los lados de un rectángulo cuya área es de 48 cm.^{2} y cuyo largo es 3 veces el ancho?

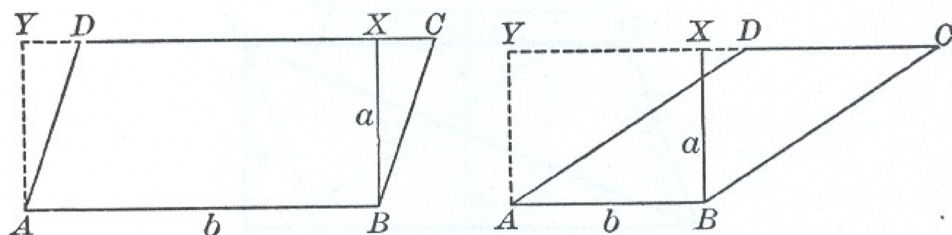
10. ¿Cuál es el área de un rectángulo cuyo perímetro es de 30 m. y la base de 24?

11. De dos lados adyacentes de un terreno rectangular de 100 m. de largo por 75 de ancho se sustrae lo necesario para un camino de 6 m. de ancho. ¿Cuántas hectáreas se sustraen?

12. De un extremo de una placa rectangular de 25 cm. de longitud se corta una cuadrada, y quedan 156,25 cm.^{2} Hállese el ancho

Proposición IV. Teorema

322. *El área de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura.*



Sea $ABCD$ un paralelogramo de base b y altura a.

Demostrar que $\square ABCD = ab$.

Demostración. De B bájese una perpendicular BX a CD o a su prolongación, y de A bájese AY perpendicular a la prolongación de CD.

$ABXY$ es un rectángulo de base b y altura a.

Puesto que $AY = BX$, y $AD = BC$, N.° 125

los $\triangle ADY$, BCX son iguales. N.° 89

Restando $\triangle BCX$ de $ABCY$, queda $ABXY$.

Restando $\triangle ADY$ de $ABCY$, queda $ABCD$.

$\therefore \square ABXY = \square ABCD$. N.° 52, 1.°

Ahora bien, $\square ABXY = ab$. N.° 320

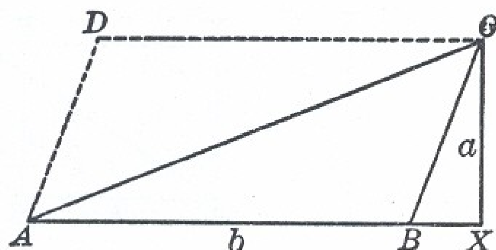
$\therefore \square ABCD = ab$ (n.° 52, 7.°). L.C.D.D.

323. Corolario 1.° *Dos paralelogramos cuyas bases y alturas son iguales son equivalentes.*

324. Corolario 2.° *Dos paralelogramos de bases iguales son entre sí como sus alturas respectivas; dos paralelogramos de alturas iguales son entre sí como sus bases respectivas; y finalmente, dos paralelogramos cualesquiera son entre sí como los productos de las bases por las alturas respectivas.*

PROPOSICIÓN V. TEOREMA

325. *El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de la base por la altura.*



Sean b la base y a la altura del triángulo ABC.

Demostrar que *área* $ABC = \frac{1}{2}$ ab.

Demostración. Con AB y BC por lados adyacentes, constrúyase el paralelogramo $ABCD$. N.° 238

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2} \square ABCD. \qquad \text{N.° 126}$$

$\therefore$ área $ABC = \frac{1}{2}$ área $ABCD = \frac{1}{2} ab$ (n.° 322). L.C.D.D.

326. COROLARIO 1.° *Todos los triángulos que tienen bases y alturas iguales respectivamente son equivalentes.*

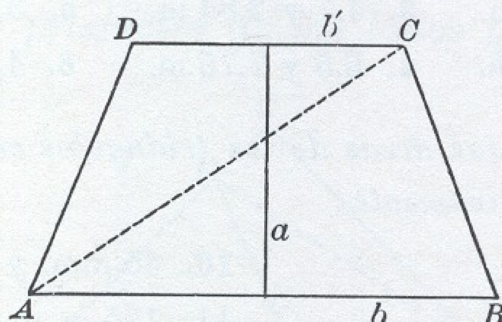
327. COROLARIO 2.° *Dos triángulos de bases iguales son entre sí como sus alturas respectivas; dos triángulos de alturas iguales son entre sí como sus bases respectivas; y finalmente, dos triángulos cualesquiera son entre sí como los productos de las bases por las alturas respectivas.*

328. COROLARIO 3.° *El producto de los catetos de un triángulo rectángulo es igual al producto de la hipotenusa por la perpendicular bajada a ella del vértice del ángulo recto.*

En efecto, si se reprentan los catetos por a y b, la hipotenusa por c, la perpendicular por p y el área por A, se tiene, tomando b por base: $A = \frac{1}{2} ab$; y tomando c por base: $A = \frac{1}{2} pc$; luego $\frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} pc$, y $ab = pc$.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA

329. *El área de un trapecio es igual a la mitad del producto de la altura por la suma de las bases.*



Sean b y b' las bases y a la altura del trapecio $ABCD$.

Demostrar que área $ABCD = \frac{1}{2}\,a\,(b + b')$.

Demostración. Trácese la diagonal AC.

Área $ABC = \frac{1}{2}\,ab$,

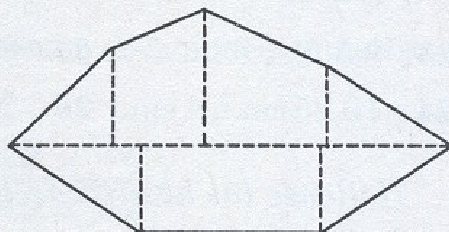
área $ACD = \frac{1}{2}\,ab'$. N.° 321

$\therefore$ área $ABCD = \frac{1}{2}\,a\,(b + b')$. L.C.D.D.

330. COROLARIO. *El área de un trapecio es igual al producto de la altura por la recta que une los puntos medios de los lados no paralelos.*

¿Qué relación existe entre esta recta y las bases?

331. Área de un polígono cualquiera. El área de un polígono cualquiera se puede determinar descomponiéndolo en triángulos, sea por diagonales, sea por rectas trazadas a los vértices por un punto interior, y calculando las áreas de estos triángulos.



En agrimensura se emplea a menudo el método ejemplificado en esta figura. Se traza una de las diagonales más largas, y de los vértices se bajan perpendiculares a ella, con lo cual el polígono queda dividido en trapecios y triángulos.

EJERCICIO 51

Determínense las áreas de los paralelogramos cuyas bases y alturas son respectivamente :

1. 2,35 y 3,8 cm. **3.** 4,7 y 2,84 m. **5.** 3,5 m. y 98,5 cm
2. 4,40 y 6,4 cm. **4.** 6,5 y 7,75 m. **6.** 4,95 cm. y 75 mm

Determínense las áreas de los triángulos cuyas bases y alturas son respectivamente :

7. 25 y 7,2 cm. **10.** 45 mm. y 2 cm.
8. 45 y 64 mm. **11.** 175 m. y 4,75 Dm.
9. 4,96 y 3,18 m. **12.** 45,6 Dm. y 275,6 m.

Hállense las áreas de los siguientes trapecios, en que los dos primeros números son las bases y el tercero la altura :

13. 7,5, 6,75, 9,8 cm. **15.** 14,8 m., 26,4 m., 1,23 Dm.
14. 15,3, 8,93, 6,44 m. **16.** 60, 61, 62 m.

Hállense las alturas de los paralelogramos cuyas áreas y bases son respectivamente :

17. 25 cm.^{2}, 8 cm. **19.** 1 m.^{2}, 3 m. **21.** 4,5 Ha., 0,75 Dm
18. 48 mm.^{2}, 24 mm. **20.** 3 Ha., 78,5 m. **22.** 4,4 m.^{2}, 44 cm.

Hállense las alturas de los triángulos cuyas áreas y bases son respectivamente :

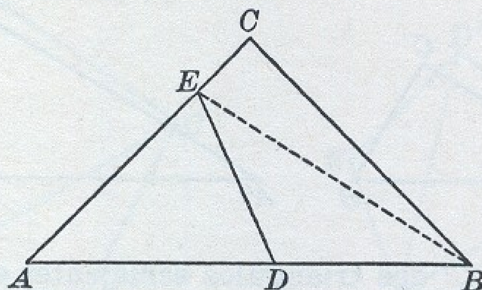
23. 9,5 m.^{2}, 3 m. **25.** 8,32 m.^{2}, 2,1 m. **27.** 3 mm.^{2}, 1,5 mm.
24. 10,25 cm.^{2}, 4 cm. **26.** 20 m.^{2}, 10 m. **28.** 4,9 Ha., 3 Dm.

Hállense las alturas de los trapecios cuyas áreas y bases son respectivamente :

29. 5,32 m.^{2}, 2 m., 3 m. **31.** 415,25 Ha., 6,3 Dm., 8,2 Dm
30. 93,28 m.^{2}, 25 m., 15 m. **32.** 725 m.^{2}, 15 m., 25 m.

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

332. *Las áreas de los triángulos en que un ángulo del uno es igual a un ángulo del otro están en la misma relación que los productos de los lados que comprenden ese ángulo.*



Sean *ABC*, *ADE* dos triángulos que tienen común el ángulo *A*.

Demostrar que $$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}.$$

Demostración. Trácese *BE*.

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ABE} = \frac{AC}{AE},$$

$$\frac{\triangle ABE}{\triangle ADE} = \frac{AB}{AD}.$$ N.º 327

(*Dos triángulos de alturas iguales son entre sí como sus bases respectivas.*)

Puesto que aquí, como en otros casos análogos, se trata de los valores numéricos de áreas y longitudes, los términos de estas proporciones representan números.

Multiplicando las dos proporciones o ecuaciones miembro a miembro, se obtiene:

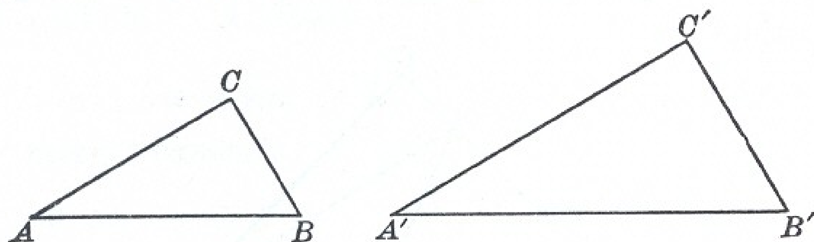
$$\frac{\triangle ABE \times \triangle ABC}{\triangle ADE \times \triangle ABE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE},$$

o, suprimiendo el factor común $\triangle ABE$,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle ADE} = \frac{AB \times AC}{AD \times AE}.$$ L.C.D.D.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA

333 *Las áreas de dos triángulos semejantes son entre sí como los cuadrados de dos lados homólogos cualesquiera.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos semejantes en que AB, BC, CA son los homólogos respectivamente de $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

Demostrar que $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \dfrac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}$.

Demostración. Puesto que los $\triangle$ son semejantes,

$$\angle A = \angle A', \qquad \text{N.° 282}$$

y por consiguiente,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB \times AC}{A'B' \times A'C'}, \qquad \text{N.° 332}$$

o sea,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AC}{A'C'}.$$

Ahora bien, puesto que los $\triangle$ son semejantes,

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'}, \qquad \text{N.° 282}$$

y la proporción anterior puede escribirse así:

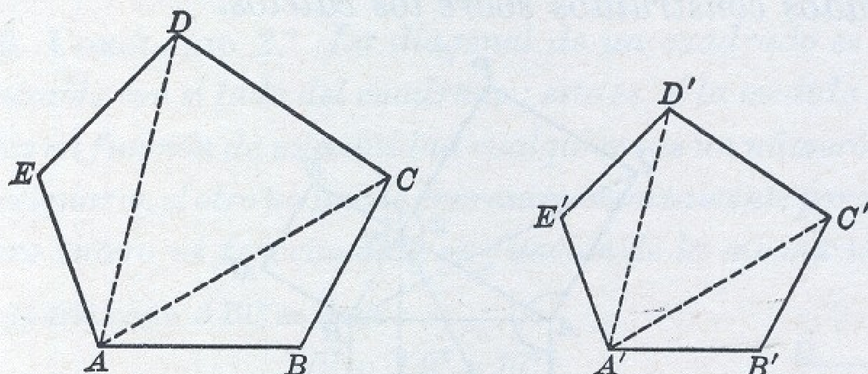
$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{AB}{A'B'} \times \frac{AB}{A'B'}, \qquad \text{N.° 52, 8.°}$$

o sea,

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}. \qquad \text{L.C.D.D}$$

PROPOSICION IX. TEOREMA

334. *Las áreas de dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos.*



Sean $ABCDE$, $A'B'C'D'E'$ dos polígonos semejantes de áreas S y S' respectivamente.

Demostrar que $S : S = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$.

Demostración. Trazando las diagonales por dos vértices homólogos cualesquiera, como A y A', los polígonos quedan divididos en triángulos semejantes. N.° 292

$$\therefore \frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \frac{\overline{AD}^2}{\overline{A'D'}^2} = \frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{\overline{AC}^2}{\overline{A'C'}^2} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}; \quad \text{N.° 333}$$

$$\therefore \frac{\triangle ADE}{\triangle A'D'E'} = \frac{\triangle ACD}{\triangle A'C'D'} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}; \quad \text{N.° 52, 7.°}$$

$$\therefore \frac{\triangle ADE + \triangle ACD + \triangle ABC}{\triangle A'D'E' + \triangle A'C'D' + \triangle A'B'C'} = \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{A'B'}^2}; \quad \text{N.° 269}$$

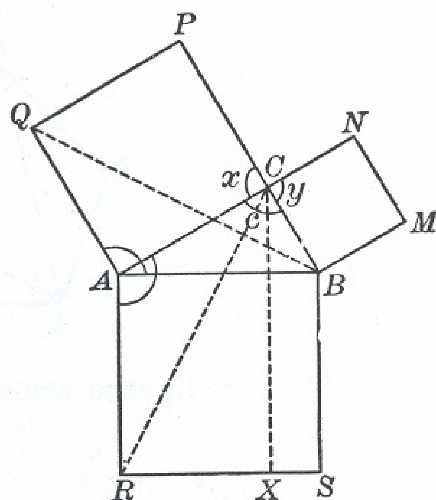
esto es, $S : S' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2$ (n.° 52, 10.°). L.C.D.D.

335. Corolario 1.° *Las áreas de dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de dos líneas homólogas cualesquiera.*

336. Corolario 2.° *Los lados homólogos de dos polígonos semejantes son entre sí como las raíces cuadradas de las áreas.*

Proposición X. Teorema

337. *El cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equivalente a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos.*



Sean *AS, BN, CQ* los cuadrados construídos sobre los lados del triángulo *ABC*, rectángulo en *C*.

Demostrar que $AS = BN + CQ$.

Demostración. Trácense CX, ∥ a BS, y también CR, BQ.

Puesto que los ∡ c y x son rectos, la línea BCP es recta. N.º 43

Como $AR = AB,\ AC = AQ,$ N.º 65

y $\angle RAC = \angle BAC + 1 \text{ rt.} = \angle BAQ,$ N.º 52, 1.º

los $\triangle$ ARC y ABQ son iguales. N.º 68

Además $\square AX = 2 \triangle ARC.$ N.º 325

(*Tienen una misma base AR y una misma altura RX.*)

Asímismo, cuadrado $CQ = 2 \triangle ABQ = 2 \triangle ARC$; N.º 325

$\therefore \square AX$ es equivalente al cuadrado CQ. N.º 52, 7.º

De igual manera se demuestra que el $\square BX$ es equivalente al cuadrado BN.

Ahora bien, $AS = \square BX + \square AX.$ N.º 52, 10.º

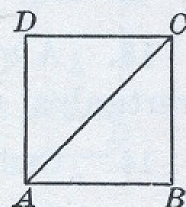
$\therefore AS = BN + CQ$ (n.º 52, 8.º). L. C. D. D.

338. Corolario 1.° *El cuadrado construído sobre uno de los catetos de un triángulo rectángulo es equivalente a la diferencia entre el construído sobre la hipotenusa y el construído sobre el otro cateto.*

339. Corolario 2.° *La diagonal de un cuadrado es inconmensurable con el lado del cuadrado; esto es, si la medida de uno de ellos en función de una unidad cualquiera es un número entero o fraccionario, el otro no puede expresarse exactamente por ningún número entero ni fraccionario en función de la misma unidad.*

En el triángulo ABC se tiene:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2,$$



o, puesto que $AB = BC$,

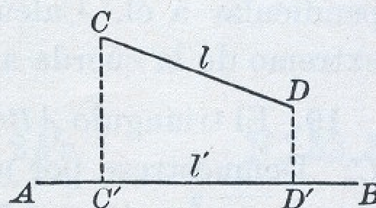
$$\overline{AC}^2 = 2\overline{AB}^2;$$

de donde $AC = AB\sqrt{2}$

y por tanto $AC : AB = \sqrt{2}$.

Puesto que $\sqrt{2}$ es inconmensurable, la razón de AC a AB es también inconmensurable. Sin embargo, el valor de esa razón, que es el de $\sqrt{2}$, puede determinarse con el grado de aproximación que se quiera.

340. Proyecciones. Si de un punto cualquiera se traza una perpendicular a una recta, el pie de la perpendicular se llama *proyección* del punto sobre la recta. La *proyección de una recta* sobre otra es la parte de ésta comprendida entre las proyecciones de las extremidades de aquélla.



En esta figura, C' y D' son las proyecciones de C y D respectivamente sobre AB. La proyección de CD es $C'D'$.

Es costumbre representar la proyección de un punto por una letra prima correspondiente a la que representa el punto. Así, la proyección de C se representa por C'. Análogamente, si la longitud de CD se representa por l, la de su proyección se representa por l'.

En los triángulos, el lado opuesto al ángulo A se representa por a; el opuesto al ángulo B, por b, etc. La altura se representa por h.

EJERCICIO 52

Dados los valores siguientes de los catetos de varios triángulos rectángulos, calcúlense las hipotenusas con dos decimales:

1. 30 y 40 m. **3.** 20 y 30 m. **5.** 2,5 y 3 m.

2. 45 y 60 m. **4.** 1,5 y 2,5 cm. **6.** $3\frac{2}{3}$ y 2 yardas.

Dados los valores siguientes de la hipotenusa y un cateto, calcúlese el otro cateto con dos decimales:

7. 50 y 40 m. **9.** 10 y 6 cm. **11.** 40 y 24 m.

8. 35 y 21 m. **10.** 1,2 y 0,8 m. **12.** 74 y 60 mm.

13. ¿A qué altura llega una escalera de 10 m. en un muro vertical, si su pie está a 3 m. del del muro?

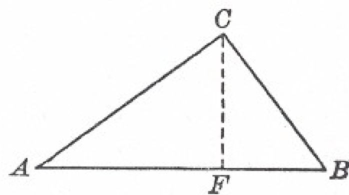
14. ¿Cuál es la altura de un triángulo equilátero de lado l?

15. ¿Cuál es el lado de un triángulo equilátero de altura h?

16. Demuéstrese que el área de un triángulo equilátero de lado l es $\frac{1}{4} l^2 \sqrt{3}$.

17. Calcúlense en un círculo de 40 cm. de diámetro la mayor y la menor cuerda que pueden trazarse por un punto situado a 12 cm. del centro.

18. El radio de un círculo es de 10 cm. Por un punto que dista 6 cm. del centro se trazan un diámetro y una cuerda perpendicular a él. Calcúlense la cuerda y las distancias de un extremo de la cuerda a los del diámetro.



19. El triángulo ABC es rectángulo en C. Demuéstrese por medio de las ecuaciones $\overline{AC}^2 = AB \times AF$, $\overline{BC}^2 = AB \times BF$ (n.º 294) que $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$.

20. Si las diagonales de un cuadrilátero se cortan en ángulo recto, la suma de los cuadrados de dos lados opuestos es igual a la de los cuadrados de los otros dos.

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA

341. *En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*

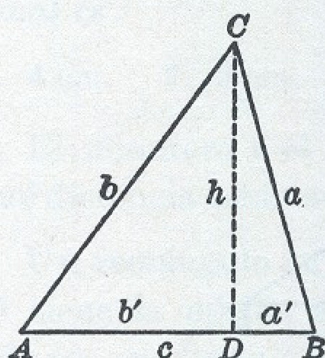


FIG. 1

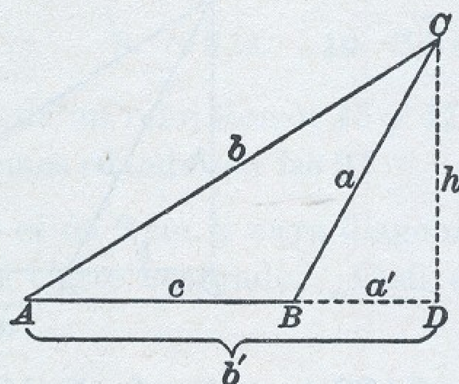


FIG. 2

Sean *A* un ángulo agudo del triángulo *ABC*, y *a′*, *b′* las proyecciones de *a* y *b* respectivamente sobre *c*.

Demostrar que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b'c$.

Demostración. Si el pie *D* de la perpendicular bajada de *C* está entre *A* y *B* (fig. 1),

$$a' = c - b',$$

y si en la prolongación de *AB* (fig. 2),

$$a' = b' - c.$$

En ambos casos, $a'^2 = b'^2 + c^2 - 2\,b'c.$ N.° 52, 3.°

Agregando h^2 a ambos miembros:

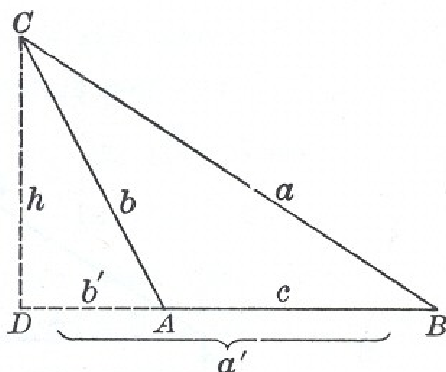
$$a'^2 + h^2 = h^2 + b'^2 + c^2 - 2\,b'c.$$ N.° 52, 1.°

Ahora bien, $a'^2 + h^2 = a^2$, y $h^2 + b'^2 = b^2$; N.° 337

luego, sustituyendo, $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b'c$ (n.° 52, 8.°). L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA

342. *En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos más el doble producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.*



Sean ABC un triángulo obtusángulo en A, y a', b' las proyecciones de a y b respectivamente sobre c.

Demostrar que $a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b'c.$

Demostración. $a' = b' + c.$ N.° 52, 10.°

$\therefore a'^2 = b'^2 + c^2 + 2\,b'c.$ N.° 52, 3.°

Agregando h^2 a ambos miembros:

$h^2 + a'^2 = h^2 + b'^2 + c^2 + 2\,b'c.$ N.° 52, 1.°

Ahora bien, $h^2 + a'^2 = a^2$, y $h^2 + b'^2 = b^2.$ N.° 337

Sustituyendo, resulta:

$a^2 = b^2 + c^2 + 2\,b'c$ (n.° 52, 8.°). L. C. D. D.

Aplicando el principio de continuidad, los tres teoremas anteriores pueden resumirse en un solo teorema general, haciendo variar gradualmente el ángulo A desde uno agudo a uno obtuso, y teniendo en cuenta los signos de las proyecciones.

Estas tres proposiciones permiten calcular la altura de un triángulo cuando se conocen los lados. En la XII, una de las ecuaciones da el valor de b' en función de a, b y c, y otra el de h en función de b y b'.

EJERCICIO 53

Hállese con dos cifras decimales la diagonal del cuadrado cuyo lado es:

1. 7 cm. **2.** 10 cm. **3.** 9,2 m. **4.** 1,5 m. **5.** 2,25 cm.

Hállese con dos cifras decimales el lado del cuadrado cuya diagonal es:

6. 4 cm. **7.** 8 cm. **8.** 5 m. **9.** $\sqrt{5}$ m. **10.** 2,5 cm.

11. El minutero y el horario de un reloj tienen 15 y 11 cm. ¿A qué distancia están sus extremos cuando son las 9?

12. Un rectángulo cuya base es de 9 cm. y cuya diagonal es de 15 tiene la misma área que cierto cuadrado. ¿Cuál es el lado de ese cuadrado?

13. Un anillo se atornilla al techo de un cuarto de 3 m. de altura. En el suelo se atornillan otros dos, a distancias de 1,5 y 3,6 m. del punto determinado por la vertical que pasa por el del techo. De éste se extienden alambres a los otros dos Calcúlese el largo de cada alambre.

14. La suma de los cuadrados de los segmentos de dos cuerdas perpendiculares es igual al cuadrado del diámetro del círculo.

Sean AB y CD las cuerdas. Trácense el diámetro BE, y también AC, ED, BD. Demuéstrese que $AC = ED$.

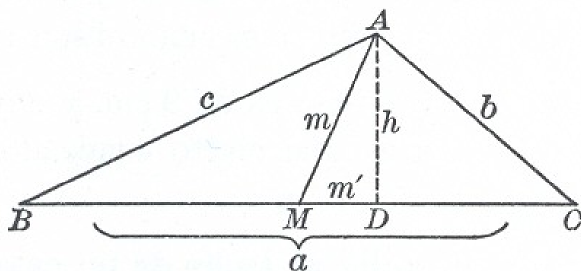
15. La diferencia de los cuadrados de dos lados de un triángulo es igual a la diferencia de los cuadrados de los segmentos determinados en el tercer lado por la perpendicular bajada a él del vértice opuesto.

16. El cuadrado de uno de los lados iguales de un triángulo isósceles es igual al cuadrado de cualquier recta trazada del vértice a la base, más el producto de los segmentos en que esa recta divide la base.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

343. *La suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual a dos veces el cuadrado de la mitad del tercero, más dos veces el cuadrado de la mediana del tercero.*

La diferencia de los cuadrados de dos lados cualesquiera de un triángulo es igual a dos veces el producto del tercero por la proyección de su mediana sobre él.



Sean ***ABC*** **un triángulo cualquiera,** ***m*** **la mediana de** ***a*****,** ***m′*** **la proyección de** ***m*** **sobre** ***a*****; y supóngase** $c > b$**.**

Demostrar: 1.° *que* $c^2 + b^2 = 2\,\overline{BM}^2 + 2\,m^2$;

2.° *que* $c^2 - b^2 = 2\,am'$.

Demostración. $\angle AMB$ es obtuso, y CMA agudo. N.° 116

Puesto que $c > b$, M está entre B y D. N.° 84

$$c^2 = \overline{BM}^2 + m^2 + 2\,\overline{BM} \cdot m', \qquad \text{N.° 342}$$

$$b^2 = \overline{MC}^2 + m^2 - 2\,\overline{MC} \cdot m'. \qquad \text{N.° 341}$$

Sumando miembro a miembro, y teniendo en cuenta que $BM = MC$:

$$c^2 + b^2 = 2\,\overline{BM}^2 + 2\,m^2. \qquad \text{N.° 52, 1.°}$$

También, restando miembro a miembro,

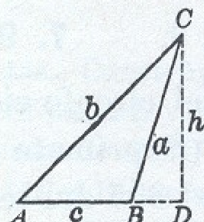
$$c^2 - b^2 = 2\,am' \text{ (n.° 52, 1.°)}. \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Discútase el caso en que $c = b$.

Este teorema puede suprimirse si se quiere.

EJERCICIO 54

1. Calcular el área de un triángulo en función de los lados.



Al menos dos de los ángulos deben ser agudos. Supóngase que A lo es.

En el $\triangle ADC$, $\quad h^2 = b^2 - \overline{AD}^2$; ¿ Por qué ?

en el ABC, $\quad a^2 = b^2 + c^2 - 2c \cdot \overline{AD}$, ¿ Pór qué ?

$$\therefore AD = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c};$$

por tanto
$$h^2 = b^2 - \frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4c^2}$$

$$= \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4c^2}$$

$$= \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4c^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4c^2}$$

Representando el perímetro $a + b + c$ por $2p$, se tiene:

$$b + c - a = a + b + c - 2a = 2p - 2a = 2(p - a).$$

Asímismo, $\quad a + b - c = 2(p - c),\ a - b + c = 2(p - b).$

Luego
$$h^2 = \frac{2p \times 2(p-a) \times 2(p-b) \times 2(p-c)}{4c^2};$$

de donde, simplificando y extrayendo la raíz cuadrada,

$$h = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

y por tanto $\quad$ área $= \frac{1}{2}ch = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$

Si, por ejemplo, los lados son 3, 4, 5,

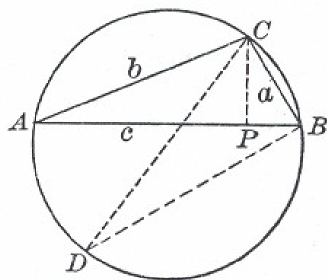
$$\text{área} = \sqrt{6(6-3)(6-4)(6-5)} = \sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2} = 6.$$

Si se ha estudiado el número 1 de este ejercicio, determínense con dos decimales las áreas de los triángulos cuyos lados son.

2. 4, 5, 6. **4.** 6, 8, 10. **6.** 7, 8, 11. **8.** 1,2, 3, 2,1.

3. 5, 6, 7 **5.** 6, 8, 9. **7.** 9, 10, 11. **9.** 5, 12, 13.

10. Calcular el radio del círculo circunscrito a un triángulo en función de los lados. (Suprímase si no se han estudiado el número 1 del ejercicio y el 305 del texto.)



Sea $CD = 2r$ el diámetro.

¿Qué se sabe con respecto a los productos $\overline{CA} \times \overline{BC}$, $\overline{CD} \times \overline{CP}$? (N.º 305.)

¿Qué se deduce de aquí en cuanto a ab y el producto $2r \cdot \overline{CP}$?

¿Cuál es el valor de CP en función de los lados?

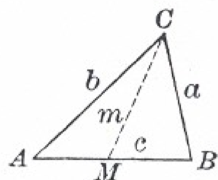
Según esto, demuéstrese que

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

Si se han estudiado los números 1 y 10 de este ejercicio, calcúlese con dos decimales el radio del círculo circunscrito a un triángulo cuyos lados tienen los valores siguientes:

11. 3, 4, 5. **12.** 27, 36, 45. **13.** 7, 9, 11. **14.** 10, 11, 12.

15. Calcular las medianas de un triángulo en función de los lados. (Suprímase si no se ha estudiado el n.º 343 del texto.)



¿Qué relación hay entre $a^2 + b^2$ y $2m^2 + 2\left(\frac{c}{2}\right)^2$? Demuéstrese ahora que

$$m = \tfrac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

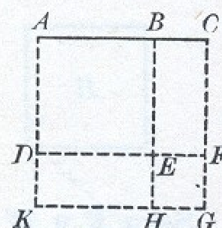
Si se ha estudiado el problema anterior, calcúlense las medianas de los triángulos cuyos lados son:

16. 3, 4, 5. **17.** 6, 8, 10. **18.** 6, 7, 8. **19.** 7, 9, 11.

20. Si los lados de un triángulo son 7, 9, 11, ¿de qué especie es el ángulo opuesto al lado 11?

21. El cuadrado construído sobre la suma de dos rectas es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre ellas más dos veces el rectángulo que tiene la una por base y la otra por altura.

Sean AB y BC las dos rectas. Constrúyanse los cuadrados $AKGC$ y $ADEB$. Prolónguense BE y DE hasta H y F respectivamente. Se forma así un cuadrado $EHGF$ de lados iguales a BC. El cuadrado AG es la suma de los cuadrados AE, EG y los rectángulos DH, BF.

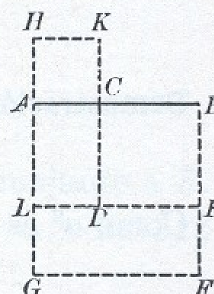


Ésta es la demostración geométrica de la fórmula

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2\,ab.$$

22. El cuadrado construído sobre la diferencia de dos rectas es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre ellas menos dos veces el rectángulo que tiene la una por base y la otra por altura.

Sean AB, AC las dos rectas, y BC su diferencia. Constrúyanse los cuadrados $AGFB$, $ACKH$, $CDEB$ sobre AB, AC y BC respectivamente. Prolónguese ED hasta su intersección L con AG. Los lados de los rectángulos LF y HD son iguales a AB y AC, y el cuadrado CE es la diferencia entre la figura entera y la suma de estos dos rectángulos.

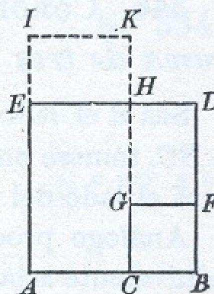


Ésta es la demostración geométrica de la fórmula

$$(a - b)^2 = a^2 \div b^2 - 2\,ab.$$

23. La diferencia entre los cuadrados construídos sobre dos rectas es igual al rectángulo que tiene la suma de ellas por base y la diferencia por altura.

Sean AB, BC las rectas dadas, y AD, CF los cuadrados construídos sobre ellas. La diferencia entre estos dos cuadrados es el polígono $ACGFDE$, compuesto de los rectángulos $ACHE$, $GFDH$. Prolónguense AE y CH hasta I y K, haciendo EI y HK iguales a BC. Trácese IK. La diferencia entre los cuadrados AD y CF es igual al rectángulo AK, cuyos lados son $AB+BC$ y $AB-BC$.

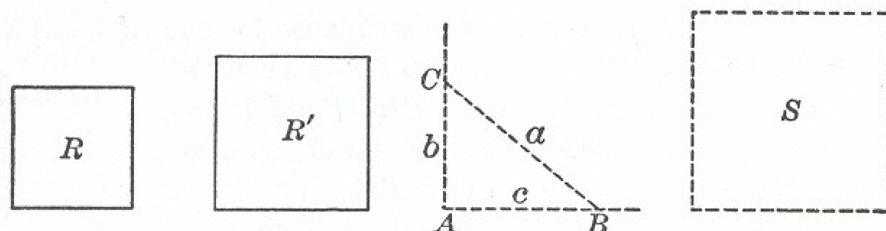


Ésta es la demostración geométrica de la fórmula

$$a^2 - b^2 = (a + b)\,(a - b).$$

Proposición XIV. Problema

344. *Construír un cuadrado equivalente a la suma de dos cuadrados dados.*



Sean R y R' los dos cuadrados dados.

Se desea construír un cuadrado equivalente a $R + R'$.

Construcción. Construýase un ángulo recto A. N.° 228

Tómense en los lados de este ángulo c y b, iguales respectivamente a los lados de R' y R. Trácese la hipotenusa a.

Construýase el cuadrado S, con a por lado.

Éste es el cuadrado buscado.

Demostración. En el triángulo rectángulo ABC,

$$a^2 = b^2 + c^2. \qquad \text{N.° 337}$$

Como a^2 es el área de S, b^2 la de R, y c^2 la de R', se tiene:

$$S = R + R' \text{ (n.° 52, 8.°).} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

345. Corolario 1.° *Construír un cuadrado equivalente a la diferencia de dos cuadrados dados.*

Puede invertirse la construcción anterior, trazando primero c, levantando una $\perp$ en A, y determinando C por un arco de radio a (dado).

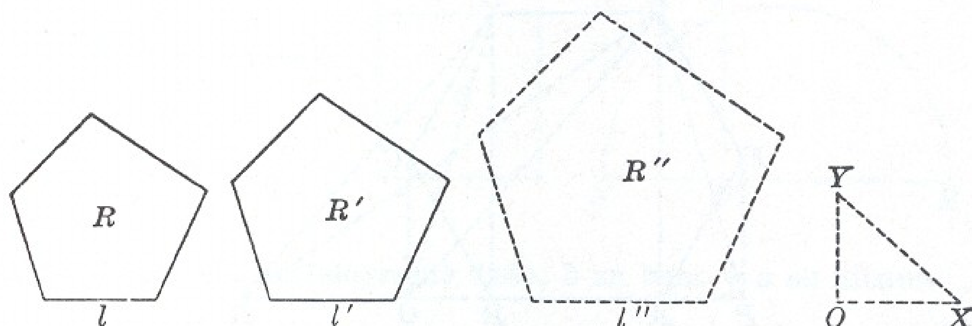
346. Corolario 2.° *Construír un cuadrado equivalente a la suma de tres cuadrados dados.*

Sea d el lado del tercer cuadrado. Levántese en C una perpendicular a BC, tómese en ella CD igual al lado d, y trácese la hipotenusa DB, que será el lado del cuadrado que se busca.

Análogo procedimiento se aplica a la construcción de un cuadrado equivalente a la suma de un número cualquiera de cuadrados dados.

PROPOSICIÓN XV. PROBLEMA

347. *Construír un polígono semejante a dos polígonos semejantes dados y equivalente a su suma.*



Sean R y R' los dos polígonos semejantes dados.

Se desea construír un polígono semejante a R y R' y cuya área sea $R + R'$.

Construcción. Constrúyase un ángulo recto O. N.° 228

Sean l y l' dos lados homólogos de R, R'.

En los lados del $\angle O$ tómense $OX = l'$, $OY = l$.

Trácese XY, y tómese una recta l'' igual a XY.

Sobre l'' como homólogo de l constrúyase R'' semejante a R. N.° 312

R'' es el polígono buscado.

Demostración. $\overline{OY}^2 + \overline{OX}^2 = \overline{XY}^2$. N.° 337

esto es, $l^2 + l'^2 = l''^2$. N.° 52, 8.°

Ahora bien, $\frac{R}{R''} = \frac{l^2}{l''^2}$,

$\frac{R'}{R''} = \frac{l'^2}{l''^2}$. N.° 334

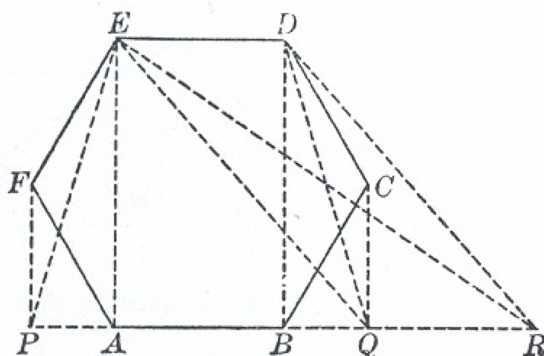
Sumando miembro a miembro:

$$\frac{R + R'}{R''} = \frac{l^2 + l'^2}{l''^2} = 1; \quad \text{N.° 52, 1.°}$$

de donde $R'' = R + R'$ (n.° 52, 2.°). L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XVI. PROBLEMA

348. *Construír un triángulo equivalente a un polígono dado.*



Sea *ABCDEF* el polígono dado.

Se desea construír un triángulo equivalente a ABCDEF.

Construcción. Sean B, C, D tres vértices consecutivos del polígono. Trácese la diagonal BD.

Por C trácese una ∥ a BD. N.º 233

Prolónguese AB hasta su intersección Q con esta paralela, y trácese DQ.

Trácense EQ, y por D una ∥ a EQ, que encuentre la prolongación de AB en R. Trácese ER.

Continúese así reduciendo el número de lados del polígono hasta obtener el $\triangle EPR$.

El $\triangle EPR$ es el buscado.

Demostración. El polígono $AQDEF$ tiene un lado menos que el $ABCDEF$. La parte $ABDEF$ les es común, y

área $BQD =$ área BCD. N.º 326

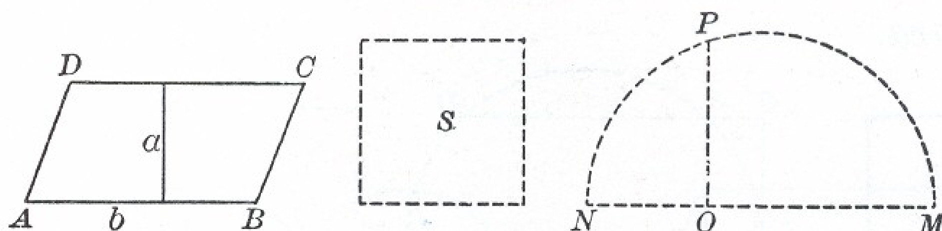
(*Los dos triángulos tienen la base común DB, y los vértices opuestos en una paralela a la base.*)

$\therefore$ área $AQDEF =$ área $ABCDEF$. N.º 52, 1.º

Análogamente, $AREF = AQDEF$, $EPR = AREF$. L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XVII. PROBLEMA

349. *Construír un cuadrado equivalente a un paralelogramo dado.*



Sean $ABCD$ **el paralelogramo dado,** b **su base y** a **su altura.**

Se desea construír un cuadrado equivalente al $\square ABCD$.

Construcción. Tómense en una recta cualquiera $NO = b$, $OM = a$. Sobre NM como diámetro descríbase un semicírculo.

Trácese por O la $\perp OP$ a NM. N.º 228

Constrúyase el cuadrado S, con OP por lado.

S es el cuadrado que se busca.

Demostración. $NO : OP = OP : OM$; N.º 297

$\therefore \overline{OP}^2 = OM \times NO = ab,$ N.º 261

o, puesto que $\overline{OP}^2 = S$ y $ab = \square ABCD,$ N.º 322

$S = \square ABCD.$ L.C.D.D.

350. COROLARIO 1.º *Construír un cuadrado equivalente a un triángulo dado.*

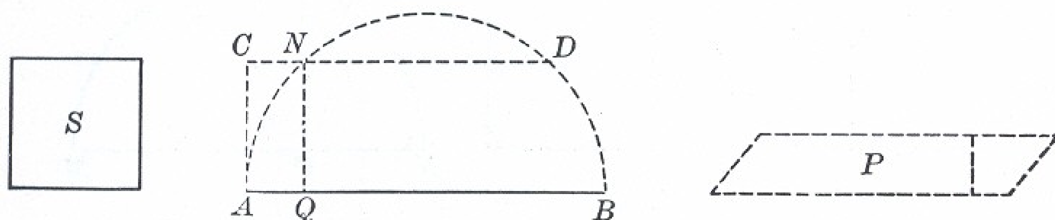
El lado del cuadrado es la media proporcional entre la base y la mitad de la altura.

351. COROLARIO 2.º *Construír un cuadrado equivalente a un polígono dado.*

Redúzcase primero el polígono a un triángulo equivalente.

Proposición XVIII. Problema

352. *Construír un paralelogramo equivalente a un cuadrado dado, conociendo la suma de la base y la altura.*



Sean S el cuadrado dado, y AB la suma dada.

Se desea construír un paralelogramo equivalente a S y en que la suma de la base y la altura sea igual a AB.

Construcción. Descríbase un semicírculo sobre AB como diámetro. En A levántese $AC \perp$ a AB e igual al lado de S. N.° 228

Trácese $CND \parallel$ a AB, y sea N su intersección con el semicírculo. N.° 233

Trácese $NQ \perp$ a AB. N.° 227

Cualquier paralelogramo, como P, que tenga QB por base y AQ por altura es equivalente a S.

Demostración. $AQ : NQ = NQ : QB$; N.° 297

$\therefore \overline{NQ}^2 = AQ \times QB.$ N.° 261

Además, NQ es $\parallel$ a CA; N.° 95

$\therefore NQ = CA$; N.° 127

$\therefore \overline{CA}^2 = AQ \times QB.$ N.° 52, 3.° y 7.°

Ahora bien, $\overline{CA}^2 = S,$ N.° 320

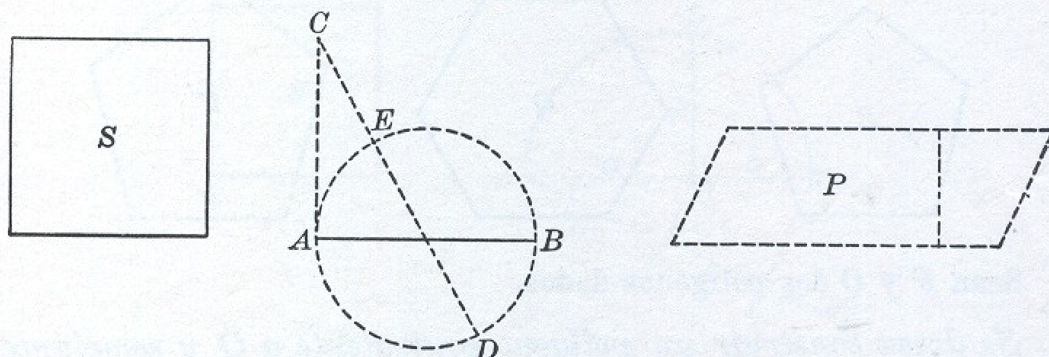
$AQ \times QB = P.$ N.° 322

$\therefore P = S$ (n.° 52, 7.°). L.C.D.D.

Ésta es la resolución geométrica del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $x + y = a$, $xy = b$.

PROPOSICIÓN XIX. PROBLEMA

353. *Construír un paralelogramo equivalente a un cuadrado dado, conociendo la diferencia entre la base y la altura.*



Sean S el cuadrado dado y AB la diferencia dada.

Se desea construír un paralelogramo equivalente a S, y en que la base menos la altura sea igual a AB.

Construcción. Descríbase un círculo sobre AB como diámetro.

Por A trácese AC tangente al círculo, N.° 246
e igual al lado de S.

Trácese la secante CED que pase por el centro y corte el círculo en E y D.

Cualquier paralelogramo, como P, que tenga CD por base y CE por altura satisface los condiciones.

Demostración. $CD : CA = CA : CE$; N.° 302

$\therefore CD \times CE = \overline{CA}^2$, N.° 261

o, puesto que $CD \times CE = P$ y $\overline{CA}^2 = S$, N.° 322

$P = S$. N.° 52, 7.°

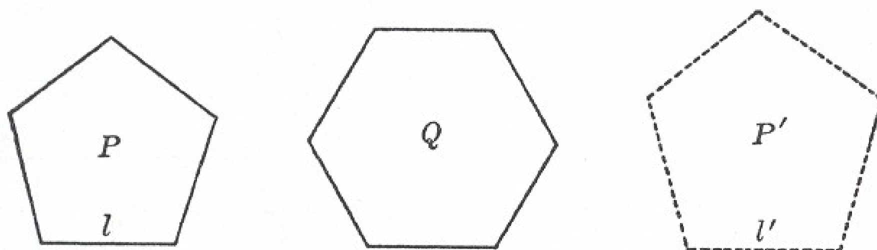
Además, por construcción,

$CD - CE = ED = AB$. L.C.D.D.

Ésta es la resolución geométrica del sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas $x - y = a$, $xy = b$.

PROPOSICIÓN XX. PROBLEMA

354 *Construír un polígono semejante a un polígono dado y equivalente a otro polígono dado.*



Sean P y Q dos polígonos dados.

Se desea construír un polígono equivalente a Q y semejante a P.

Construcción. Constrúyanse cuadrados equivalentes a P y a Q. N.° 351

Sean m y n sus lados respectivamente.

Sea l un lado cualquiera de P.

Determínese l', cuarta proporcional de m, n, l. N.° 307

Sobre l', como homólogo de l, constrúyase un polígono P' semejante a P. N.° 312

P' es el polígono buscado

Demostración. $m : n = l : l'$; Por constr.

$\therefore m^2 : n^2 = l^2 : l'^2$ N.° 270

También, $P = m^2$, $Q = n^2$; Por constr.

de donde, sustituyendo en la segunda proporción, N.° 52, 8.°

$P : Q = l^2 : l'^2$.

Puesto que P y P' son semejantes, Por constr.

$P : P' = l^2 : l'^2$; N.° 334

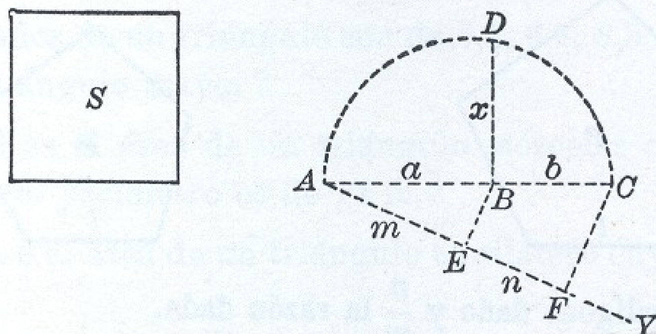
$\therefore P : Q = P : P'$; N.° 52, 7.°

$\therefore P' = Q$. N.° 263

Luego P' es equivalente a Q y semejante a P L.C.D.D.

Proposición XXI. Problema

355. *Construír un cuadrado que esté en una relación dada con un cuadrado dado.*



Sean S **el cuadrado dado y** $\frac{n}{m}$ **la razón dada.**

Se desea construír un cuadrado que sea a S *como* n *es a* m

Construcción. Tómese AB igual al lado de S, y trácese por A una recta cualquiera AY.

En AY tómense AE igual a m unidades cualesquiera, y EF igual a n unidades.

Trácese EB.

Trácese por F una ∥ a EB, que encuentre en C la prolongación de AB. N.° 233

Descríbase un semicírculo sobre AC como diámetro.

Levántese en B la perpendicular x a AC. N.° 228

x es el lado del cuadrado buscado.

Demostración. $a : x = x : b$; N.° 297

$\therefore a : b = a^2 : x^2$. N.° 271

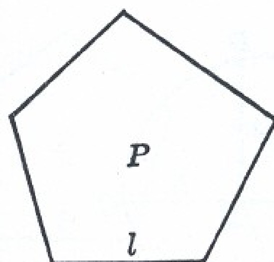
También, $a : b = m : n$; N.° 273

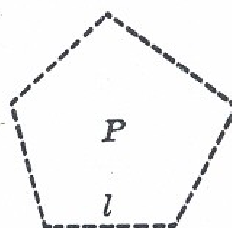
$\therefore a^2 : x^2 = m : n$, N.° 52, 7.°

y por tanto $\therefore x^2 : a^2 = n : m$ (n.° 266) **L.C.D.D.**

PROPOSICIÓN XXII. PROBLEMA

356. *Construír un polígono semejante a un polígono dado y que esté con él en una relación dada.*





Sean P el polígono dado y $\frac{n}{m}$ la razón dada.

Se desea construír un polígono semejante a P y que sea a P como n *es a* m.

Construcción. Sea l un lado cualquiera de P.

Trácese una recta l' tal que el cuadrado construído sobre ella esté con el construído sobre l en la relación de n a m. N.º 355

Sobre l' como lado homólogo de l constrúyase el polígono P' semejante al P. N.º 312

P' es el polígono buscado.

Demostración. P y P' son semejantes. Por constr.

$$\therefore \frac{P'}{P} = \frac{l'^2}{l^2}. \qquad \text{N.º 334}$$

Ahora bien,

$$\frac{l'^2}{l^2} = \frac{n}{m}. \qquad \text{Por constr.}$$

$$\therefore \frac{P'}{P} = \frac{n}{m} \text{ (n.º 52, 7.º)}. \qquad \text{L.C.D.L.}$$

Por este método se puede construír un cuadrado que sea, por ejemplo, igual a dos o tres veces un cuadrado dado, o la mitad o la cuarta parte de un cuadrado dado; construír un triángulo equilátero que sea un múltiplo o submúltiplo cualquiera de un triángulo equilátero dado; y, en general, reducir o aumentar una figura cualquiera en una relación dada cualquiera, como ocurre a menudo en las aplicaciones.

EJERCICIO 55

Problemas de cálculo

1. Los lados de un triángulo son de 0,6, 0,7 y 0,7 cm. ¿De qué especie es el ángulo mayor?

2. Los lados de un triángulo son de 5,1, 6,8, 8,5 m. ¿De qué especie es el ángulo mayor?

3. ¿Cuál es el área de un triángulo isósceles cuya base es de 4 m. y cuyo perímetro es de 14 m.?

4. Hállese el área de un triángulo equilátero cuyo perímetro mide 18 cm.

5. Hállese el área de un triángulo rectángulo en que la hipotenusa y un cateto son de 1,7 y 0,8 m. respectivamente.

6. Hállese la razón de las alturas de dos triángulos equivalentes cuyas bases son 1,5 y 4,5 m. respectivamente.

7. Las bases de un trapecio son de 34 y 30 m., y la altura es de 2 m. Hállese el lado del cuadrado equivalente.

8. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es igual a $\sqrt{2}$ m.?

9. ¿Cuál es el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa es $7\sqrt{2}$ m.?

10. Hállense la altura y el área de un triángulo equilátero cuyo lado es igual a $2\sqrt{3}$ cm.

11. ¿Cuál es el área de un triángulo equilátero cuyo lado es igual a 1?

12. ¿Cuál es el lado de un triángulo equilátero cuya área es de 43,3 cm.^{2}?

13. Los lados de un triángulo son 2,8, 3,5, 2,1 cm. Dibújese y véase a qué clase pertenece. Verifíquese la conclusión por el cálculo, aplicando un teorema importante relativo a los triángulos de esa clase, y hállese el área del triángulo.

EJERCICIO 56

Teoremas

1. El área de un rombo es igual a la mitad del producto de las diagonales.

2. Dos triángulos son equivalentes si la base del uno es igual a la mitad de la del otro, y la altura del primero es doble de la del segundo.

3. El área de un polígono circunscrito es igual a la mitad del perímetro multiplicada por el radio del círculo inscrito.

4. Dos paralelogramos son equivalentes si sus bases son inversamente proporcionales a sus alturas.

5. Si sobre los lados de un triángulo rectángulo se construyen triángulos equiláteros, el construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los otros dos.

6. Si sobre los lados de un triángulo rectángulo como lados homólogos se construyen polígonos semejantes, el construído sobre la hipotenusa es equivalente a la suma de los otros dos.

7. Si de un punto interior a un paralelogramo se trazan rectas a los vértices, la suma de los dos triángulos cuyas bases son dos de los lados paralelos es equivalente a la suma de los otros dos.

8. Toda recta trazada por el punto de intersección de las diagonales de un paralelogramo bisecta el área del paralelogramo.

9. La recta que une los puntos medios de las bases de un trapecio bisecta el área del trapecio.

10. Si un cuadrilátero que tiene dos lados paralelos es dividido en partes equivalentes por una diagonal, el cuadrilátero es un paralelogramo.

11. El triángulo determinado por rectas que van del punto medio de uno de los lados no paralelos de un trapecio a los vértices opuestos es equivalente a la mitad del trapecio.

EJERCICIO 57

PROBLEMAS DE CONSTRUCCIÓN

1. Dado un cuadrado, construír otro cuya área sea la mitad de la del primero.

2. Construír un triángulo rectángulo equivalente a un triángulo oblicuángulo dado.

3. Construír un triángulo que sea equivalente a la suma de dos triángulos dados.

4. Sobre una recta dada, construír un triángulo equivalente a un triángulo dado.

5. Sobre una recta dada, construír un rectángulo equivalente a un paralelogramo dado.

6. Sobre una recta dada como cateto, construír un triángulo rectángulo equivalente a un triángulo dado.

7. Sobre una recta dada como hipotenusa, construír un triángulo rectángulo equivalente a un triángulo dado.

8. Por un punto P de la base de un triángulo, trazar una recta que divida el triángulo en dos partes equivalentes.

9. Por un punto P del lado AB de un triángulo ABC, trazar una recta a la prolongación de AC tal que BC la bisecte.

10. Hallar dentro de un triángulo dado un punto tal que las rectas trazadas de este punto a los vértices dividan el triángulo en tres equivalentes.

11. Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por una recta paralela a uno de los lados.

12. Trazar por un punto dado una recta tal que los segmentos, a contar de ese punto, interceptados en ella por perpendiculares trazadas a ella por dos puntos dados estén en una relación dada.

13. Hallar un punto tal que las perpendiculares bajadas de él a los lados de un triángulo dado estén entre sí como p, q, r

EJERCICIO 58

Cuestionario de repaso

1. ¿Qué es área? ¿Qué es unidad superficial?

2. ¿Qué son figuras equivalentes?

3. Enúnciense dos teoremas sobre la relación entre las áreas de dos rectángulos.

4. ¿Cómo se determina el área de un rectángulo de lados dados? Conociendo el área y un lado, ¿cómo se halla el otro?

5. ¿Qué se entiende por el producto de dos rectas?

6. Si el perímetro de un triángulo es de 10 m., ¿puede el triángulo tener la misma área que uno cuyo perímetro es de 1 m.? ¿Puede decirse igual cosa de dos cuadrados?

7. Si el perímetro de un paralelogramo es de 10 m., ¿puede el área ser igual a la de un rectángulo cuyo perímetro es de 1 m.? ¿Aplícase esto también a dos rectángulos?

8. ¿Cómo se determina el área de un polígono cualquiera? ¿Qué datos son necesarios?

9. Dos de los lados de un triángulo son de 5 y 6 m., y el ángulo comprendido, de 70°. Los valores correspondientes en otro triángulo son 2 m., 7,5 m. y 70°. ¿Cuál es la relación de las áreas?

10. Dos lados homólogos de dos triángulos semejantes son de 5 y 15 cm. respectivamente. ¿Cuál es la relación de las áreas?

11. Explíquese cómo se procede a calcular el área de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa se conoce.

12. Dados los tres lados de un triángulo, ¿cómo se puede saber si el triángulo es rectángulo?

13. Explíquese en términos generales cómo se construye un cuadrado equivalente a un polígono dado.

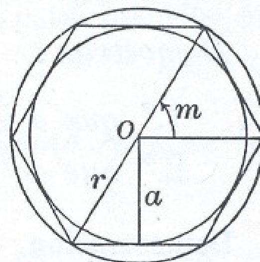
LIBRO V

POLÍGONOS REGULARES Y CÍRCULOS

357. Polígono regular. Llámase *polígono regular* el polígono que es a la vez equilátero y equiángulo.

El cuadrado y el triángulo equilátero son ejemplos comunes de polígonos regulares.

En el n.° 362 se demuestra que todo polígono regular es inscriptible y circunscriptible; esto es, que todo polígono regular tiene un círculo inscrito y uno circunscrito; y también, que el círculo inscrito y el circunscrito son concéntricos (n.° 188).



358. Radio. Llámase *radio* de un polígono regular el radio del círculo circunscrito al polígono.

En esta figura, r es el radio del polígono.

359. Apotema. Llámase *apotema* de un polígono regular el radio del círculo inscrito.

En la figura anterior, a es el apotema del polígono. El apotema es perpendicular al lado del polígono (n.° 185). Su longitud es la altura común de los triángulos en que el polígono puede dividirse por rectas trazadas del centro de los círculos inscrito y circunscrito a los vértices del polígono.

360. Centro. Llámase *centro* de un polígono regular el centro común de los círculos inscrito y circunscrito.

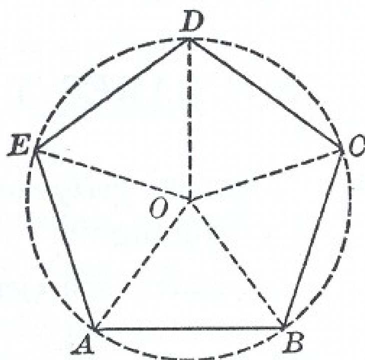
En la figura anterior, O es el centro del polígono.

361. Ángulo central. Llámase *ángulo central* de un polígono regular el ángulo formado por dos radios que pasan por los extremos de uno cualquiera de los lados.

En la figura anterior, m es el ángulo central del polígono. Es evidente que este ángulo es subtendido por la cuerda que en el círculo circunscrito forma el lado del polígono.

PROPOSICIÓN I. TEOREMA

362. *Todo polígono regular tiene un círculo inscrito y uno circunscrito.*



Sea *ABCDE* un polígono regular cualquiera.

Demostrar :

1.° *que a ABCDE puede circunscribirse un círculo.*
2.° *que en ABCDE puede inscribirse un círculo.*

Demostración. 1.° Sea O el centro del círculo que pasa por tres vértices A, B, C. N.° 190

Trácense OA, OB, OC, OD.

$OB = OC$ (n.° 162), y $AB = CD$. N.° 357

También, $\angle CBA = \angle DCB$, N.° 357

$\angle CBO = \angle OCB$; N.° 74

$\therefore \angle OBA = \angle DCO$; N.° 52, 1.°

$\therefore$ los $\triangle$ OAB, OCD son iguales; N.° 68

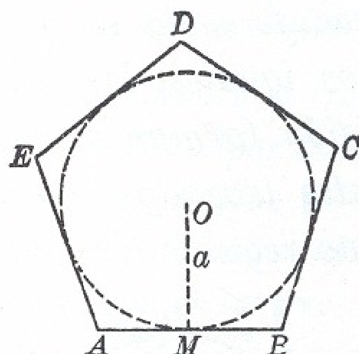
$\therefore OA = OD$. N.° 67

Luego el círculo que pasa por A, B, C pasa por D.

De igual manera puede demostrarse que el círculo que pasa por B, C, D pasa también por E, y así sucesivamente.

Luego el círculo de centro O y radio OA está circunscrito al polígono $ABCDE$. I. C.D.D.

Demostración. 2.° Sea O el centro del círculo circunscrito al polígono.



Puesto que los lados del polígono son cuerdas iguales del círculo circunscrito, equidistan del centro. N.° 178

Luego el círculo cuyo centro es O y cuyo radio a es la perpendicular de O a uno cualquiera de los lados está inscrito en el polígono (n.° 205). L. C. D. D

363. Corolario 1.° *Todo radio de un polígono regular bisecta el ángulo por cuyo vértice pasa.*

364. Corolario 2.° *Los ángulos centrales de todo polígono regular son iguales entre sí y suplementarios de los internos del polígono.*

Los ángulos centrales son subtendidos por arcos iguales. ¿Por qué? Si M es el punto medio de AB, los ∡ MOB, OBM son complementarios, y por tanto sus dobles AOB, CBA son suplementarios.

365. Corolario 3.° *Todo polígono equilátero inscrito es polígono regular.*

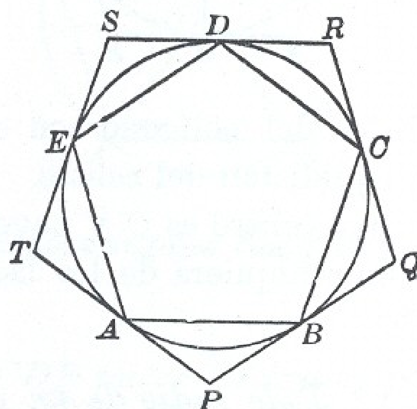
Demuéstrese la igualdad de los ángulos.

366. Corolario 4.° *Todo polígono equiángulo circunscrito es polígono regular.*

Trácense rectas del los vértices al centro del círculo. Fórmanse así varios triángulos isósceles, de cuya igualdad se deduce que el polígono es equilátero. (Véase el n.° 192.)

Proposición II. Teorema

367. *Si una circunferencia se divide en un número cualquiera de arcos iguales, las cuerdas trazadas por los puntos de división forman un polígono regular inscrito, y las tangentes trazadas por los mismos puntos forman un polígono regular circunscrito.*



Sean *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, *EA* arcos iguales de una circunferencia, *ABCDE* el polígono formado por las cuerdas correspondientes, y *PQRST* el formado por las tangentes trazadas por los puntos de división *A*, *B*, *C*, *D*, *E*.

Demostrar: 1.° *que* $ABCDE$ *es un polígono regular.*
2.° *que* $PQRST$ *es un polígono regular.*

Demostración. 1.° Puesto que, según el supuesto, todos los arcos son iguales, se tiene:

cuerda $AB = BC = CD = DE = EA$; N.° 170

$\therefore$ el polígono $ABCDE$ es regular. N.° 365

(*Todo polígono equilátero inscrito es regular.*)

Demostración. 2.° $\angle P = \angle Q = \angle R = \angle S = \angle T$. N.° 221

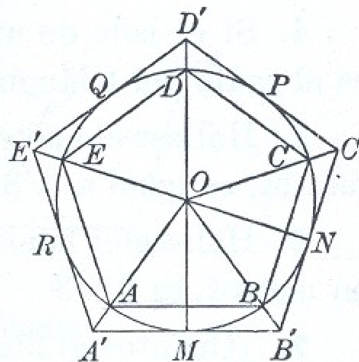
(*Todos tienen por medida la mitad de arcos iguales.*)

Luego $PQRST$ es un polígono equiángulo circunscrito.

$\therefore$ $PQRST$ es regular (n.° 366). L. C. D. D.

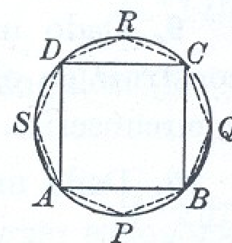
368. Corolario 1.° *Las tangentes trazadas por los vértices de un polígono regular inscrito forman un polígono regular circunscrito del mismo número de lados.*

369. Corolario 2.° *Las tangentes trazadas por los puntos medios de los arcos subtendidos por los lados de un polígono regular inscrito forman un polígono regular circunscrito de lados paralelos al inscrito, y cuyos vértices están en las prolongaciones de los radios del inscrito.*

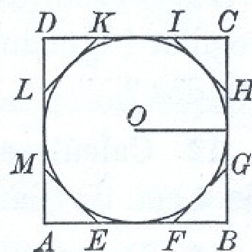


Los lados AB, $A'B'$, por ejemplo, son perpendiculares a OM (n.os 176, 185), y paralelos (n.° 95); y como $NB' = MB'$ (n.° 192), y estas rectas son ⊥s a ON y OM respectivamente, OB' es la bisectriz del $\angle MON$ (n.° 152), y por tanto pasa por el punto medio del arco MN (n.° 166). Explíquese por qué dicho punto medio coincide con el vértice B del polígono inscrito.

370. Corolario 3.° *Si por los vértices de un polígono regular inscrito se trazan rectas a los puntos medios de los arcos adyacentes, se forma un polígono regular de doble número de lados.*



371. Corolario 4.° *Si por los puntos medios de los arcos determinados por los puntos de contacto de los lados de un polígono regular circunscrito se trazan tangentes, éstas forman un polígono regular circunscrito de doble número de lados.*



372. Corolario 5.° *El perímetro de un polígono regular inscrito es menor que el del polígono regular inscrito de doble número de lados; y el de un polígono regular circunscrito es mayor que el del circunscrito de doble número de lados.*

EJERCICIO 59

1. Determínese el radio de un cuadrado de 5 cm. de lado

2. Hállese el lado del cuadrado cuyo radio es 7 m.

3. Si el radio de un triángulo equilátero es de 3 cm., ¿cuál es la longitud del lado?

4. Si el lado de un triángulo equilátero es de 2 cm. ¿cuál es el radio del triángulo?

5. Hállese el apotema del triángulo equilátero cuyo lado, en metros, es igual a $\sqrt{3}$.

6. Hállese el lado de un triángulo equilátero cuyo apotema, en metros, es $2\sqrt{3}$

7. ¿Cuántos grados tiene el ángulo central de un triángulo equilátero? ¿el de un exágono regular?

8. Dado un triángulo equilátero inscrito en un círculo, circunscribir un triángulo equilátero al mismo círculo.

9. Dado un triángulo equilátero inscrito en un círculo, construír en el mismo círculo los exágonos regulares inscrito y circunscrito.

10. Dado un cuadrado inscrito en un círculo, construír los octógonos regulares inscrito y circunscrito.

11. ¿Cuántos grados tiene el ángulo central de un octógono regular? ¿cuántos el ángulo interno? ¿Cuál es la suma de los dos?

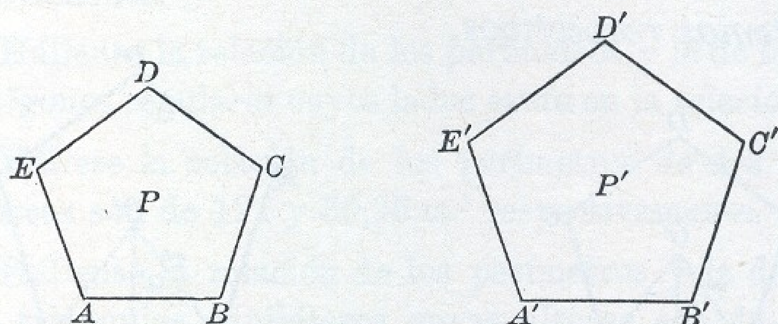
12. Calcúlese el área de un cuadrado inscrito en un círculo de 4 cm. de diámetro.

13. Demuéstrese que el apotema de un triángulo equilátero es igual a la mitad del radio.

14. Demuéstrese que el apotema de un triángulo equilátero es igual a un cuarto del diámetro del círculo circunscrito, y dedúzcase de aquí un procedimiento para inscribir un triángulo equilátero en un círculo dado.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA

373. *Dos políjonos regulares cualesquiera de un mismo número de lados son semejantes.*



Sean P y P' dos polígonos regulares de n lados.

Demostrar que P *y* P' *son semejantes.*

Demostración. Cada uno de los ángulos internos de cada polígono es igual a $\frac{2(n-2)}{n}$ rt. N.° 145

Luego los dos polígonos son mutuamente equiángulos.

Además, $AB = BC = CD = DE = EA$,

$A'B' = B'C' = C'D' = D'E' = E'A'$; N.° 357

$$\therefore \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{EA}{E'A'}.$$ N.° 52, 2.ª

Así pues los dos polígonos tienen iguales sus ángulos respectivamente, y sus lados homólogos proporcionales.

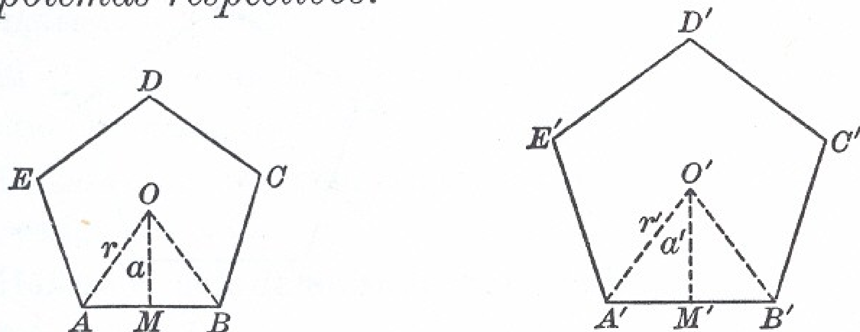
Luego los dos polígonos son semejantes (n.° 282). L. C. D. D.

374. COROLARIO. *Las áreas de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos.*

En efecto, las áreas de dos polígonos semejantes cualesquiera son entre sí como los cuadrados de los lados homólogos (n.° 334), y dos polígonos regulares de un mismo número de lados son siempre semejantes.

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA

375. *Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí como los radios o los apotemas respectivos.*



Sean O, O' los centros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados, p y p' los perímetros, r y r' los radios, a y a' los apotemas.

Demostrar que $\mathrm{p : p' = r : r' = a : a'}$.

Demostración. Los polígonos son semejantes; N.° 373

$\therefore p : p' = AB : A'B'$. N.° 291

En los triángulos isósceles OAB, $O'A'B'$,

$\angle O = \angle O'$. N.° 364

Tiénese también:

$OA : OB = O'A' : O'B'$. N.° 52, 7.°

(*Ambas razones son iguales a 1.*)

$\therefore$ los $\triangle$ OAB, $O'A'B'$ son semejantes; N.° 288

$\therefore AB : A'B' = r : r'$. N.° 282

Además, los $\triangle$ AMO, $A'M'O'$ son semejantes; N.° 286

$\therefore r : r' = a : a'$. N.° 282

$\therefore p : p' = r : r' = a : a'$ (n.° 52, 7.°). L.C.D.D.

376. COROLARIO. *Las áreas de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son entre sí como los cuadrados de los radios o de los apotemas respectivos.*

EJERCICIO 60

1. Determínese la relación de los perímetros y la de las áreas de dos exágonos regulares cuyos lados son de 2 y 4 cm. respectivamente.

2. Hállense la relación de los perímetros y la de las áreas de dos octógonos regulares cuyos lados están en la relación de 2 a 6.

3. Hállese la relación de los perímetros de dos cuadrados cuyas áreas son de 121 y 30,25 $m.^2$ respectivamente.

4. Hállense la relación de los perímetros y la de las áreas de dos triángulos equiláteros cuyas alturas son de 3 y 12 m respectivamente.

5. El área de un triángulo equiángulo es 9 veces la de otro triángulo equiángulo. ¿En qué relación están las alturas?

6. El área de la sección trasversal de una barra de 2,5 cm de espesor es de 12 $cm.^2$ ¿Cuál es el área de la sección de una barra de 3,5 cm. de espesor, suponiendo semejantes las secciones?

7. Hállense las relaciones entre las áreas y los perímetros de dos cuadrados inscritos en círculos de 4 y 12 cm. de diámetro respectivamente.

8. Sobre los lados de dos cuadrados inscritos en círculos de 2 y 8 cm. respectivamente se construyen triángulos equiláteros. ¿En qué relación están las áreas de estos triángulos?

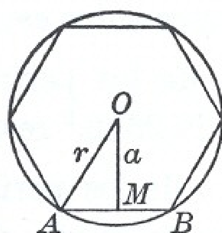
9. De un trozo redondo de madera se corta una viga de la mayor sección trasversal cuadrada posible. ¿Cuál es el área de esta sección en función del diámetro? ¿Cuál es el área de una viga semejante obtenida de un trozo cuyo diámetro es la mitad del del primero?

10. Todo polígono equiángulo de número impar de lados inscrito en un círculo es regular.

11. Todo polígono equilátero de número impar de lados circunscrito a un círculo es regular.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA

377. *Si el número de lados de un polígono regular inscrito se aumenta indefinidamente, el apotema tiende hacia el radio como límite.*



Sean *O* el centro de un polígono regular inscrito de *n* lados, *l* el lado, *r* el radio, y *a* el apotema.

Demostrar que, a medida que n *crece indefinidamente, el apotema* a *tiende hacia el límite* r.

Demostración. Se sabe que $a < r$. N.º 86

También se tiene: $r - a < AM$, N.º 112

$AM < l$; N.º 174

$\therefore r - a < l$. N.º 52, 9.º

Si se toma n suficientemente grande, l, y por tanto $r - a$, puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Puesto que $r - a$ puede llegar a ser y permanecer menor que cualquier cantidad dada, por pequeña que sea, síguese que

a medida que n aumenta, a tiende hacia el límite r. L. C. D. D.

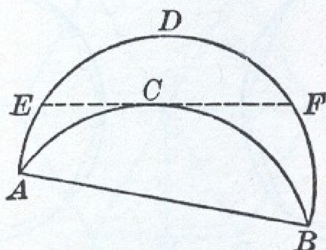
378. COROLARIO. *Si el número de lados de un polígono regular inscrito se aumenta indefinidamente, el cuadrado del apotema tiende hacia el del radio como límite.*

En efecto, $r^2 - a^2 = \overline{AM}^2$. N.º 338

Haciendo crecer n, puede hacerse $\overline{AM}$, y por tanto $\overline{AM}^2$ y $r^2 - a^2$, tan pequeño como se quiera.

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA

379. *Un arco circular cualquiera situado dentro del espacio determinado por su cuerda y una línea cualquiera es menor que esta línea.*



Sean *BCA* un arco circular, y *AB* su cuerda.

Demostrar que BCA es menor que cualquier línea envolvente trazada de A a B.

Demostración. De todas las líneas que pueden trazarse entre *A* y *B* y encierren el área *ABC*, debe haber por lo menos una de longitud mínima, puesto que no todas son iguales.

Sea *ADB* una línea cualquiera que encierra la superficie *ACB*. Esta línea no puede ser la más corta; pues si se traza una tangente cualquiera *ECF* al arco *BCA*, *BFCEA* será menor que *BFDEA*, puesto que $FCE < FDE$. N.° 53, 3.°

Se demuestra análogamente que ninguna otra línea envolvente puede ser la más corta.

$\therefore$ *BCA* es menor que toda línea envolvente. **L.C.D.D.**

380. COROLARIO. *La circunferencia de un círculo es menor que el perímetro de todo polígono circunscrito al círculo.*

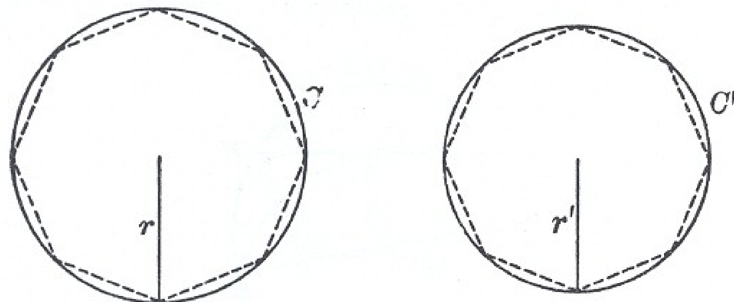
381. La circunferencia y el círculo como límites. Las dos proposiciones siguientes se suponen consecuencias de la del n.° 379:

1.ª *La circunferencia es el límite del perímetro de un polígono inscrito o circunscrito cuyo número de lados aumenta sin cesar.*

2.ª *El área del círculo es el límite del área de un polígono inscrito o circunscrito cuyo número de lados aumenta sin cesar.*

Proposición VII. Teorema

382. *Dos circunferencias cualesquiera son entre sí como sus radios.*



Sean C y C' las longitudes de dos circunferencias de radios r y r' respectivamente.

Demostrar que $C : C' = \mathrm{r} : \mathrm{r}'$.

Demostración. Inscríbanse en los dos círculos dos polígonos regulares semejantes de perímetros p y p'.

Se tendrá: $p : p' = r : r'$. N.° 375

Supóngase que el número de lados de estos polígonos se aumenta indefinidamente.

p y p' tenderán hacia los límites C y C'. N.° 381

Como se tiene siempre: $pr' = p'r$, N.° 261

síguese que $Cr' = C'r$. N.° 207

$\therefore C : C' = r : r'$ (n.° 264). L.C.D.D.

383. Corolario 1.° *La relación de la circunferencia al diámetro es un número constante.*

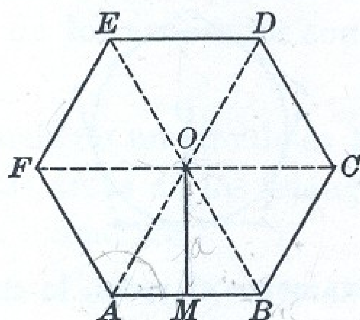
En efecto, de la relacion $C : C' = r : r'$ se deduce $C : 2r = C' : 2r'$.

384. El símbolo π. La relación constante de la circunferencia al diámetro se representa por la letra griega π (pi).

385. Corolario 2.° *Puesto que* $C : 2\mathrm{r} = \pi$, *síguese que* $C = 2\pi\mathrm{r}$.

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA

386. *El área de un polígono regular es igual a la mitad del producto del perímetro por el apotema.*



Sean p el perímetro, a el apotema y S el área del polígono regular *ABCDEF*.

Demostrar que $S = \frac{1}{2}$ pa.

Demostración. Trácense los radios OA, OB, OC, etc.

El polígono queda así dividido en tantos triángulos como lados tiene.

Todos estos $\triangle$ tienen por altura el apotema a, y el área de cada $\triangle$ es $\frac{1}{2}a$ multiplicado por la base. N.° 325

Luego la suma de las áreas de todos los $\triangle$ es igual a $\frac{1}{2}a$ multiplicado por la suma de las bases. N.° 52, 1.°

Ahora bien, la suma de las áreas de todos los triángulos es igual al área del polígono. N.° 52, 10.°

La suma de las bases de los triángulos es igual al perímetro del polígono. N.° 52, 10.°

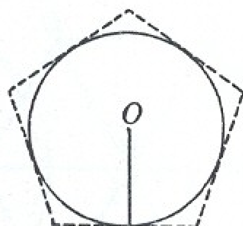
Luego, finalmente, $S = \frac{1}{2}pa$. L. C. D. D

387. Partes semejantes. En círculos desiguales se llaman *arcos semejantes, sectores semejantes, segmentos semejantes* los que corresponden a ángulos centrales iguales.

Por ejemplo, dos arcos de 30° de dos círculos diferentes son semejantes, y también lo son los segmentos y sectores correspondientes.

Proposición IX. Teorema

388. *El área de un círculo es igual a la mitad del producto de la circunferencia por el radio.*



Sean r, C, S respectivamente el radio, la circunferencia y el área de un círculo.

Demostrar que $S = \frac{1}{2} Cr$.

Demostración. Circunscríbase al círculo un polígono regular de n lados. Sean p su perímetro y S' su área. Su apotema es r.

Por tanto $S' = \frac{1}{2} pr$. N.° 386

Supóngase que n aumenta indefinidamente.

p tiende hacia el límite C; N.° 381

r es constante;

$\therefore \frac{1}{2} pr$ tiende hacia el límite $\frac{1}{2} Cr$.

Además, S' tiende hacia S. N.° 381

Pero S' es siempre igual a $\frac{1}{2} pr$. N.° 386

$\therefore S = \frac{1}{2} Cr$ (n.° 207). L.C.D.D.

389. Corolario 1.° *El área de un círculo es igual a* πr^2.

En efecto, $S = \frac{1}{2} Cr = \frac{1}{2} r \times 2 \pi r$ (n.° 385) $= \pi r^2$.

390. Corolario 2.° *Las áreas de dos círculos cualesquiera son entre sí como los cuadrados de los radios.*

391. Corolario 3.° *El área de un sector circular es igual a la mitad del producto del arco por el radio.*

En efecto, área del sector : área del círculo = arco : circunf.

EJERCICIO 61

1. ¿En qué relación están dos circunferencias cuyos diámetros son 1,6 m. y 25 cm. respectivamente?

2. La circunferencia de un círculo es 3 veces la de otro. ¿Cuál es la relación de los cuadrados construídos sobre los dos radios?

3. La circunferencia de un círculo es $\frac{5}{2}$ de la de otro. ¿Cuál es la relación entre las áreas de los triángulos equiláteros construídos sobre los dos diámetros?

4. La circunferencia de un círculo de 5 cm. de diámetro es de 15,708 cm. ¿Cuál es la circunferencia interior de un tubo cuyo diámetro interior es de 2 cm.?

5. Una rueda de 4 m. de circunferencia tiene un diámetro de 1,27 m., aproximadamente. ¿Cuál es la circunferencia de una rueda de 1,905 m. de diámetro? ¿Es necesario calcular las longitudes de estas circunferencias para determinar la relación en que se encuentran?

6. Hállense el radio y el apotema de un exágono regular cuyo lado es de 2 cm.

7. Hállense el apotema y el área de un triángulo equilátero cuyo lado es de 2 cm.

8. El radio de un círculo es $\frac{5}{2}$ del de otro. Si el área del menor es de 15,2 cm.^{2}, ¿cuál es la del mayor?

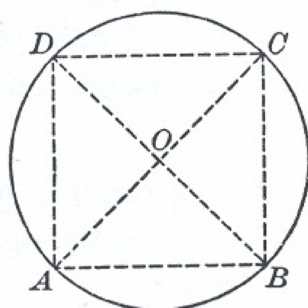
9. Los radios de dos círculos están en la relación de 3,25 a 1. Si el área del menor es de 17,75 m.^{2}, ¿cuál es el área del mayor?

10. Las circunferencias de dos árboles cilíndricos de trasmisión son respectivamente de 24 y 10 cm. ¿En qué relación están las áreas de las secciones trasversales respectivas?

11. Determínese el área de un sector circular cuyo radio es de 2,25 m. y cuyo arco es de 1.75 m.

PROPOSICIÓN X. PROBLEMA

392 *Inscribir un cuadrado en un círculo dado.*



Sea O el centro del círculo dado.

Se desea inscribir un cuadrado en el círculo O.

Construcción. Trácense dos diámetros cualesquiera AC, BD perpendiculares entre sí. N.° 228

Trácense AB, BC, CD, DA.

$ABCD$ es el cuadrado que se busca.

Demostración. Los $\measuredangle CBA$, DCB, ADC, BAD son rectos, por estar inscritos en semicírculos. N.° 215

Los ángulos centrales son rectos. Por constr.

Los arcos AB, BC, CD, DA son iguales, N.° 212

y los lados AB, BC, CD, DA son iguales. N.° 170

$\therefore$ el cuadrilátero $ABCD$ es un cuadrado (n.° 65). L.C.D.D.

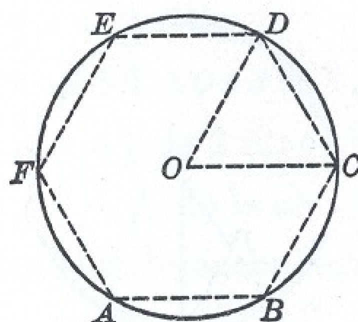
393. COROLARIO. *Inscribir en un círculo dado polígonos regulares de 8, 16, 32 . . . lados.*

Bisectando los arcos AB, BC, CD, DA se obtiene fácilmente el octógono regular inscrito. Bisectando los arcos de éste se obtiene el polígono regular de 16 lados; bisectando los de éste, el polígono regular de 32 lados; y así sucesivamente.

Aplicando este procedimiento puede construírse el polígono regular inscrito de 2^n lados, representando por n un entero cualquiera.

Proposición XI. Problema

394. *Inscribir un exágono regular en un círculo dado.*



Sea *O* el centro del círculo dado.

Se desea inscribir un exágono regular en el círculo O.

Construcción. Trácese un radio cualquiera OC.

Haciendo centro en C, con radio CO, descríbase un arco que corte la circunferencia en D.

Trácese CD.

La recta CD es el lado del exágono que se busca, y por tanto el exágono puede construírse determinando los otros puntos por arcos consecutivos trazados con CD por radio.

Demostración. Trácese OD.

El $\triangle OCD$ es equiángulo. N.° 75

Luego $\angle COD = \frac{1}{3}$ de 2 rt. $= \frac{1}{6}$ de 4 rt.; N.° 107

$\therefore$ arco $CD = \frac{1}{6}$ de la circunferencia.

$\therefore$ la cuerda CD es el lado del exágono regular inscrito. L. C. D. D

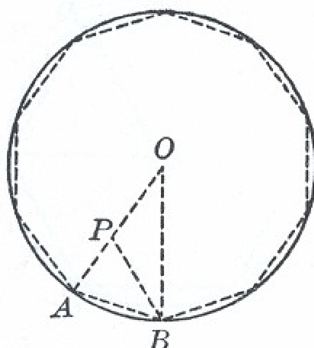
395. Corolario 1.° *Inscribir un triángulo equilátero en un círculo dado.*

Únanse alternativamente los vértices del exágono.

396. Corolario 2.° *Inscribir en un círculo dado un polígono regular de 12, 24, 48 . . . lados.*

Proposición XII. Problema

397. *Inscribir un decágono regular en un círculo dado.*



Sea O el centro del círculo dado.

Se desea inscribir un decágono regular en el círculo O.

Construcción. Trácese un radio cualquiera OA.

Divídase OA en P en medio y extremo, N.° 311
de modo que $OA:OP = OP:AP$.

Haciendo centro en A, descríbase un arco de radio OP, que corte la circunferencia en B.

Trácese AB.

AB es el lado del decágono regular, que puede construírse determinando cuerdas iguales a AB por medio de arcos trazados con AB por radio.

Demostración. Trácense PB, OB. Por construcción,

$OA:OP = OP:AP$, y $AB = OP$;

$\therefore OA:AB = AB:AP$. N.° 52, 8.°

Además, $\angle BAO = \angle BAP$; Ident.

$\therefore$ los $\triangle$ OAB y BAP son semejantes. N.° 288

Como el $\triangle OAB$ es isósceles, N.° 162

el $\triangle BAP$, semejante al OAB, es isósceles; N.° 282

$\therefore AB = BP = OP$. N.° 62

Como el $\triangle PBO$ es isósceles, $\angle O = \angle OBP$. N.° 74

Además. $\angle APB = \angle O + \angle OBP = 2\angle O$; N.° 111

$\therefore \angle BAP = 2\angle O$,

$\angle OBA = 2\angle O$; N.° 52, 8.°

$\therefore$ suma de los $\angle$s del $\triangle OAB = 5\angle O = 2$ rt., N.° 107

y por tanto $\angle O = \frac{1}{5}$ de 2 rt., ó $\frac{1}{10}$ de 4 rt.;

$\therefore$ arco $AB = \frac{1}{10}$ de la circunferencia, N.° 212

y la cuerda AB es el lado del decágono regular inscrito. L. C. D. D.

398. Corolario 1.° *Inscribir un pentágono regular en un círculo dado.*

399. Corolario 2.° *Inscribir en un círculo dado polígonos regulares de 20, 40, 80 . . . lados.*

Como en otros casos análogos, el procedimiento se reduce a construír primero el decágono, bisectar luégo sus arcos, después los nuevos arcos obtenidos de esta manera, y así sucesivamente.

EJERCICIO 62

Sean r, a, l, *el radio, apotema y lado de un polígono regular, respectivamente, A el ángulo interno, y O el central. Demuéstrese que:*

1. En el triángulo regular (equilátero), $l = r\sqrt{3}$, $a = \frac{1}{2}r$, $A = 60°$, $O = 120°$.

2. En el cuadrilátero regular (cuadrado), $l = r\sqrt{2}$, $a = \frac{1}{2}r\sqrt{2}$, $A = O = 90°$.

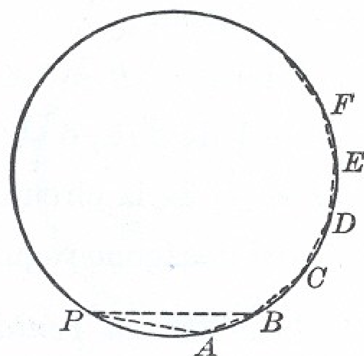
3. En el exágono regular, $l = r$, $a = \frac{1}{2}r\sqrt{3}$, $A = 2O = 120°$, $O = \frac{1}{2}A = 60°$.

4. En el decágono regular,

$$l = \frac{r(\sqrt{5}-1)}{2},\ a = \frac{1}{4}r\sqrt{10+2\sqrt{5}},\ A = 144°,\ O = 36°.$$

PROPOSICIÓN XIII. PROBLEMA

400. *Inscribir un pentadecágono regular en un círculo dado.*



Sea dado un círculo cualquiera.

Se desea inscribir en él un pentadecágono regular.

Construcción. Trácense una cuerda PB igual al radio del círculo, una PA igual al lado del decágono regular inscrito, y luégo la AB.

AB es el lado del pentadecágono regular inscrito, que puede construírse determinando los vértices por medio de arcos trazados con AB por radio.

Demostración. Arco $PB = \frac{1}{6}$ de circunf., N.º 394

arco $PB = \frac{1}{10}$ de circunf.; N.º 397

$\therefore$ arco $AB = (\frac{1}{6} - \frac{1}{10})$ de circunf. $= \frac{1}{15}$ de circunf.

Síguese pues que la cuerda AB es el lado del pentadecágono regular inscrito. L. C. D. D

401. COROLARIO. *Inscribir en un círculo dado polígonos regulares de 30, 60, 120 . . . lados.*

El procedimiento es el de bisecciones sucesivas que se ha explicado al tratar de otros casos análogos. El mismo procedimiento se aplica a la construcción de un polígono regular inscrito de $2^n m$ lados, cuando se sabe construír el de m lados.

EJERCICIO 63

1. Dado un círculo, ¿cuántos círculos del mismo radio pueden trazarse que sean tangentes exteriormente al círculo dado y entre sí?

2. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo equilátero inscrito en un círculo de 5 cm. de diámetro?

3. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo equilátero circunscrito a un círculo de 5 cm. de diámetro?

4. ¿Cuál es el perímetro de un exágono regular circunscrito a un círculo de 5 cm. de diámetro?

Circunscribir a un círculo dado los polígonos regulares siguientes:

5. Triángulo. **7.** Exágono. **9.** Pentágono.
6. Cuadrilátero. **8.** Octógono. **10.** Decágono.

11. Describir un círculo cuya circunferencia sea la suma de las de dos círculos de radios dados.

12. Describir un círculo cuya área sea la suma de las áreas de dos círculos de radios dados.

13. Describir un círculo cuya área sea 3 veces mayor que la de un círculo dado.

Construír ángulos de:

14. 18°. **15.** 36°. **16.** 9°. **17.** 12°. **18.** 24°.

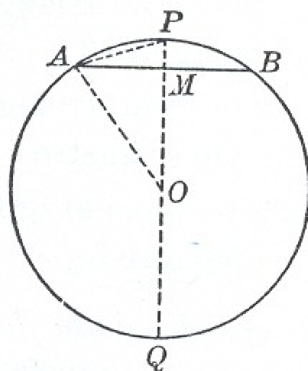
Sobre una recta dada construír:

19. Un triángulo equilátero. **23.** Un pentágono regular.
20. Un cuadrado. **24.** Un decágono regular.
21. Un exágono regular. **25.** Un dodecágono regular.
22. Un octógono regular. **26.** Un pentadecágono regular.

27. Se desea cortar de un trozo redondo de 80 cm. de diámetro un poste cuya sección trasversal sea el mayor octógono regular posible. Calcúlese el lado

PROPOSICIÓN XIV. PROBLEMA

402. *Dados el lado y el radio de un polígono regular inscrito, calcular el lado del polígono regular inscrito de doble número de lados.*



Sean AB el lado y OA el radio de un polígono regular inscrito.

Se desea calcular el lado AP del polígono regular inscrito de doble número de lados.

Resolución. Sean r el radio OA y l el lado AB.

Trácese el diámetro PQ, que es perpendicular a AB en su punto medio M (n.º 177). Tiénese pues:

$$AM = \tfrac{1}{2}\, l.$$

En el $\triangle$ rectángulo AOM,

$$\overline{OM}^2 = r^2 - \tfrac{1}{4}\, l^2; \qquad \text{N.º 338}$$

de donde $$OM = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\, l^2}. \qquad \text{N.º 52, 3.º}$$

También se tiene: $$PM = r - OM$$
$$= r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\, l^2}. \qquad \text{N.º 52, 8.º}$$

Además, $$\overline{AP}^2 = PQ \times PM, \qquad \text{N.º 298}$$

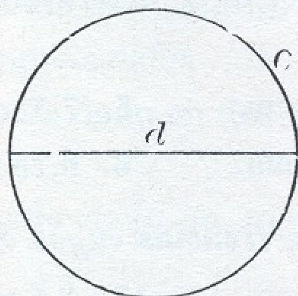
o, puesto que $$PQ = 2\, r, \text{ y } PM = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\, l^2},$$
$$\overline{AP}^2 = 2\, r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\, l^2}\right); \qquad \text{N.º 52, 8.º}$$

de donde $$AP = \sqrt{2\, r\left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}\, l^2}\right)} \qquad \text{N.º 52, 3.º}$$
$$= \sqrt{r\left(2\, r - \sqrt{4\, r^2 - l^2}\right)}.$$

403. COROLARIO. *Si* $r = 1$, $AP = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l^2}}$.

Proposición XV. Problema

404. *Hallar la relación de la circunferencia al diámetro.*



Sean d el diámetro y C la circunferencia de un círculo.

Se desea calcular el valor de $\frac{C}{d}$, *o sea, el valor de* π.

Resolución. $2\pi r = C$ (n.° 385), y $\pi = \frac{1}{2}C$ para $r = 1$.

Sea, en general, l_n el lado de un polígono regular de n lados. Haciendo $r = 1$, se tiene también $l_6 = 1$ (n.° 394), y, aplicando la fórmula del n.° 403, se obtiene:

Fórmula	Lado	Perímetro
$l_{12} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - 1^2}}$	0,51763809	6,21165708
$l_{24} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,51673809)^2}}$	0,26105238	6,26525722
$l_{48} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,26105238)^2}}$	0,13080626	6,27870041
$l_{96} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,13080626)^2}}$	0,06543817	6,28206396
$l_{192} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,06543817)^2}}$	0,03272346	6,28290510
$l_{384} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,03272346)^2}}$	0,01636228	6,28311544
$l_{768} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (0,01636228)^2}}$	0,00818121	6,28316941

Luego, aproximadamente, $C = 6,28317$, y $\pi = 3,14159$.

La relación π es inconmensurable. El valor 3,1416 es suficientemente aproximado para casi todos los fines prácticos. Cuando no se requiere grande exactitud, $\frac{22}{7}$ es un valor cómodo.

EJERCICIO 64

PROBLEMAS DE CÁLCULO

Con 3,1416 como valor de π, determínense las circunferencias cuyos radios son:

1. 3 cm. **3.** 2,7 cm. **5.** 7,5 m. **7.** $2\frac{2}{3}$ yardas.
2. 5 cm. **4.** 3,4 cm. **6.** 6,75 m. **8.** $3\frac{7}{12}$ pies.

Calcúlense las circunferencias cuyos diámetros son:

9. 9 cm. **11.** 5,9 cm. **13.** 2,5 m. **15.** 29 cm.
10. 12 cm. **12.** 7,3 cm. **14.** 3,125 m. **16.** 47 mm.

Calcúlense los radios de las circunferencias siguientes:

17. 7π m. **19.** 15,708 m. **21.** 18,8496 m. **23.** 345,576 m.
18. $3\frac{1}{3}\pi$ m. **20.** 21,9912 m. **22.** 125,664 m. **24.** 3487,176 m.

Calcúlense los diámetros de las siguientes circunferencias:

25. 15π m. **27.** $2\pi r$. **29.** 188,496 m. **31.** 3361,512 km.
26. π^2 cm. **28.** $7\pi a^2$. **30.** 219,912 cm. **32.** 3173,016 km.

Hállense las áreas de los círculos cuyos radios son:

33. $5x$. **35.** 27 cm. **37.** 3,125 m. **39.** 2,5 mm.
34. 2π. **36.** 4,8 cm. **38.** 4,625 m. **40.** 7,75 cm.

Hállense las áreas de los círculos cuyos diámetros son:

41. $16ab$. **43.** 2,5 m. **45.** 3,67 m. **47.** 3,17 cm.
42. $24\pi^2$ cm. **44.** 7,3 m. **46.** 4,625 m. **48.** $4\frac{1}{12}$ pies.

Hállense las áreas de los círculos cuyas circunferencias son:

49. 2π cm. **51.** πa. **53.** 18,8496 m. **55.** 333,0096 m.
50. 4π cm. **52.** $14\pi a^2$. **54.** 329,868 m. **56.** 364,4256 m

Hállense los radios de los círculos cuyas áreas son:

57. 12,5664 $m.^2$ **58.** 28,2744 $km.^2$ **59.** 78,54 $mm.^2$

EJERCICIO 65

Problemas de construcción

1. Inscribir en un círculo dado un polígono regular semejante a un polígono regular dado.

2. Dividir un círculo dado en dos partes equivalentes por un círculo concéntrico.

3. Dividir un círculo dado en n partes equivalentes por círculos concéntricos.

4. Describir un círculo cuya circunferencia sea la diferencia entre las circunferencias de dos círculos de radios dados.

5. Describir un círculo cuya área sea a la de un círculo dado como m es a n.

6. Construír un pentágono regular, dada una diagonal.

7. Trazar a un círculo dado una tangente tal que la parte de ella comprendida entre el punto de contacto y una recta dada sea de longitud dada.

8. Dado un triángulo equilátero, construír tres círculos iguales tales que cada uno sea tangente a los otros dos y a dos lados del triángulo.

9. Dado un cuadrado, trazar en su interior cuatro círculos iguales tales que cada uno sea tangente a dos de los otros y a dos lados del cuadrado.

10. Dado un cuadrado, trazar en su interior cuatro círculos iguales tales que cada uno sea tangente a otros dos y a un solo lado del cuadrado.

11. Trazar a dos círculos exteriores uno al otro una secante común tal que las partes de ella interceptadas por las dos circunferencias sean de longitudes dadas a y b.

12. Por un punto de intersección de dos circunferencias que se cortan, trazar una secante común cuya longitud sea igual a la de un segmento de recta dado.

EJERCICIO 66

PROBLEMAS SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS

1. Hállese el lugar geométrico del centro del círculo inscrito en un triángulo en que uno de los lados y el ángulo opuesto permanecen constantes.

2. Hállese el lugar de la intersección de las perpendiculares bajadas de los vértices a los lados opuestos de un triángulo en que un lado y el ángulo opuesto permanecen constantes.

3. Hállese el lugar de la extremidad de una tangente de longitud dada a un círculo dado.

4. Hállese el lugar de los puntos tales que las dos tangentes trazadas por cada uno de ellos a un círculo dado formen un ángulo dado.

5. Hállese el lugar del punto medio de una recta trazada de un punto dado a una recta dada.

6. Hállese el lugar de los vértices de los triángulos de altura dada construídos sobre una base dada.

7. Hállese el lugar del punto la suma de cuyas distancias a dos paralelas dadas es constante.

8. Hállese el lugar del punto la diferencia de cuyas distancias a dos paralelas dadas es constante.

9. Hállese el lugar de un punto la suma de cuyas distancias a dos rectas dadas que se cortan sea constante.

10. Hállese el lugar de un punto la diferencia de cuyas distancias a dos rectas dadas que se cortan sea constante.

11 Hállese el lugar de un punto cuyas distancias a dos puntos dados estén en la relación $m : n$.

12. Hállese el lugar de un punto cuyas distancias a dos paralelas dadas estén en la relación $m : n$.

13. Hállese el lugar de un punto la suma de los cuadrados de cuyas distancias a dos puntos dados sea constante

EJERCICIO 67

Cuestionario de examen

1. El lado de un triángulo equilátero es $2n$. Haciendo centro en los vértices se describen círculos de radio n. Hállense el área limitada por los tres arcos exteriores al triángulo y la limitada por los tres arcos interiores.

2. Si la cuerda de una curva circular de una vía férrea es de 30 m., y el radio es de 278,87 m., el ángulo central es de 6° 10′. ¿Qué error se comete tomando la longitud de la cuerda por la del arco?

3. Si se representa por a el lado de un octógono regular inscrito, ¿cómo se expresa en función de a el lado del cuadrado inscrito en el mismo círculo?

4. Las áreas de dos segmentos de círculo semejantes están entre sí en la misma relación que los cuadrados de los radios o de los diámetros respectivos.

5. Si un ángulo central de 25° es subtendido por un arco de 100 m., ¿cuál es el radio del círculo? Dése el resultado aproximado hasta décimas.

6. Hállense el perímetro y el área de un octógono regular inscrito en un círculo de 16 m. de radio.

7. ¿Cuál es el área libre (abertura) de la sección trasversal de un tubo cuyo diámetro exterior y espesor son de 30 y 2,5 cm. respectivamente?

8. Un punto se mueve de tal modo que la diferencia de los cuadrados de sus distancias a dos puntos fijos es constante. Demuéstrese que el punto se mueve en una recta perpendicular a la que une los dos puntos fijos.

9. En un círculo cuyo radio es de 10 cm. se trazan dos cuerdas paralelas iguales al radio. Hállese el área de la parte del círculo comprendida entre las dos paralelas.

EJERCICIO 68

Fórmulas

Siendo r el radio y l el lado de un polígono regular, demuéstrense las fórmulas siguientes, y hállese con dos decimales el valor de l cuando $r = 1$:

1. En el triángulo, $l = r\sqrt{3}$.

2. En el cuadrado, $l = r\sqrt{2}$.

3. En el pentágono, $l = \frac{1}{2} r \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$.

4. En el exágono, $l = r$.

5. En el octógono, $l = r\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.

6. En el decágono, $l = \frac{1}{2} r(\sqrt{5} - 1)$.

7. En el dodecágono, $l = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

8. Hállese una fórmula para calcular el apotema de un pentágono regular de radio r y lado l.

9. Demuéstrese que el apotema de un polígono regular cualquiera es igual a $\frac{1}{2}\sqrt{4r^2 - l^2}$.

10. Siendo l el lado y r el radio de un polígono regular inscrito, demuéstrese que el lado del circunscrito semejante es $\dfrac{2lr}{\sqrt{4r^2 - l^2}}$.

11. Hállese una fórmula para calcular el área comprendida entre tres circunferencias de un mismo radio r tangentes exteriormente.

12. El perímetro de un polígono regular inscrito de n lados es p, y el del circunscrito semejante, P. Hállese una fórmula para calcular p' y P', valores correspondientes en los polígonos regulares de $2n$ lados.

13. Un terreno circular de diámetro d está rodeado por un paseo de anchura b. Hállese una fórmula para calcular el área del paseo.

EJERCICIO 69

Problemas prácticos

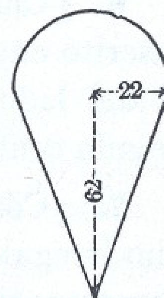
1. Si el diámetro de la rueda de una bicicleta es de 70 cm., ¿cuántas vueltas da la rueda en un viaje de 15 km.?

2. Si la rueda de un coche da 264 vueltas en un viaje de 800 m., ¿cuál es su diámetro?

3. Hállese el área de una carretera de 3 m. de ancho que rodea un depósito circular de agua de 100 m. de diámetro.

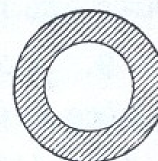
4. La luz (distancia entre los extremos) de un arco circular es de 36 m., y el punto más alto dista 4,5 m. de la línea que une los extremos. ¿Cuál es el radio del arco?

5. Dos tuberías de abastecimiento de agua, de 15 y 20 cm. de diámetro respectivamente, desembocan en otra el área de cuya sección trasversal es la suma de las secciones de aquéllas. ¿Cuál es el diámetro de la tubería principal?



6. Determínese el área de una cometa hecha como se indica en esta figura, en que la parte superior es un semicírculo de 44 cm. de diámetro, y la inferior un triángulo isósceles de 62 cm. de altura.

7. Para el dibujo de un arco de mampostería se necesita tomar sobre un círculo de 25 cm. de diámetro un arco de 20 cm. de longitud. ¿Cuál es el ángulo central correspondiente?



8. En la arandela que aquí se representa, el diámetro del agujero es de 40 mm. y el ancho de la arandela es de 12 mm. ¿Cuál es el área de la sección trasversal de la parte sólida?

9. Un abanico abierto tiene la forma de un sector de 120° y 25 cm. de radio. ¿Cuál es el área?

10. El área de un abanico abierto es de 550 cm.^{2}. Si el arco es de 111°, ¿cuál es el radio?

EJERCICIO 70

Cuestionario de repaso

1. ¿Qué es polígono regular? ¿Qué es apotema?

2. ¿Qué nombres especiales se dan al triángulo y al cuadrilátero regulares?

3. Si se conoce el ángulo interno de un polígono regular, ¿cómo se determina el número de lados?

4. Los lados de dos polígonos regulares de n lados son respectivamente l y l'. ¿En qué relación están los radios, los apotemas, los perímetros y las áreas de los dos?

5. Los radios de dos círculos son d y d'. ¿Cuál es la relación entre las dos circunferencias? ¿En qué relación están las dos áreas?

6. ¿Cuál es el límite del apotema de un polígono regular inscrito cuyo número de lados aumenta indefinidamente? ¿cuál el del lado? ¿cuál el del perímetro? ¿el del área? ¿el del ángulo central? ¿el del ángulo interno?

7. ¿Cómo se halla el área de un polígono regular? ¿la de uno irregular? ¿la de un cuadrado? ¿la de un triángulo? ¿la de un paralelogramo? ¿la de un círculo? ¿la de un trapecio? ¿la de un sector?

8. ¿Qué polígonos regulares se pueden inscribir por los métodos dados hasta aquí? Nómbrense tres polígonos regulares que no se haya aprendido a inscribir.

9. ¿Cómo puede calcularse el área de un círculo cuando se conoce la circunferencia?

10. ¿Cómo puede calcularse la circunferencia de un círculo de área conocida?

11. ¿Cuál es el radio de un círculo en que la longitud de la circunferencia y el área del círculo están expresados por un mismo número?

EJERCICIO 71

REPASO GENERAL DE LA GEOMETRÍA PLANA

Dígase cómo se clasifican:

1. Las líneas. **3.** Los triángulos. **5.** Los polígonos.
2. Los ángulos. **4.** Los cuadriláteros. **6.** Los paralelogramos.

Díganse algunas de las condiciones para que:

7. Dos triángulos sean iguales.

8. Dos paralelogramos sean iguales.

9. Dos triángulos sean semejantes.

10. Dos rectas sean paralelas.

11. Dos paralelogramos sean equivalentes.

12. Dos polígonos sean semejantes.

Complétense los enunciados siguientes:

13. En todo triángulo el cuadrado del lado opuesto...

14. Si una trasversal corta dos paralelas...

15. En toda proporción el producto de los medios...

16. El ángulo formado por dos secantes que se cortan tiene por medida...

17. Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como...

18. Las áreas de dos polígonos semejantes son entre sí...

19. El área de un círculo es igual a...

20. En un mismo círculo o en círculos iguales, a cuerdas iguales...

21. En un mismo círculo los ángulos centrales son entre sí como...

22. Si dos secantes se cortan dentro o fuera de un círculo, el producto de...

23. Si cuatro segmentos de recta tienen un extremo común, y el ángulo formado por cada dos segmentos consecutivos es igual al opuesto formado por los otros dos, los cuatro segmentos son partes de dos rectas que se cortan.

24. Si sobre los lados de un exágono regular se construyen cuadrados exteriores, los vértices exteriores son los de un dodecágono regular.

25. En todo triángulo rectángulo la mediana de la hipotenusa es igual a la mitad de ésta.

26. Es imposible trazar de los extremos de un lado de un triángulo a los otros dos lados rectas que se dividan mutuamente en partes iguales.

27. El rombo es el único paralelogramo circunscriptible.

28. El cuadrado es el único rectángulo circunscriptible.

29. Ningún paralelogramo oblicuángulo es inscriptible.

30. Si dos triángulos tienen iguales un lado y el ángulo opuesto, los círculos circunscritos son iguales.

31. Si los círculos inscrito y circunscrito de un triángulo son concéntricos, el triángulo es equilátero.

32. El triángulo formado uniendo los puntos de contacto del círculo inscrito en un triángulo cualquiera es acutángulo.

33. Las diagonales de un pentágono regular se cortan en los vértices de otro pentágono regular.

34. Si dos radios perpendiculares se prolongan hasta su encuentro con una tangente, las otras tangentes trazadas por los puntos de intersección son paralelas.

35. La recta que une los pies de las perpendiculares trazadas a los lados iguales de un triángulo isósceles por los extremos del otro lado es paralela a éste.

36. La suma de las perpendiculares trazadas a los n lados de un polígono regular por un punto interior es igual a n veces el apotema.



37. Si dos ángulos consecutivos de un cuadrilátero son rectos, las bisectrices de los otros dos son perpendiculares entre sí.

38. Si dos ángulos opuestos de un cuadrilátero son rectos, las bisectrices de los otros dos son paralelas o coinciden.

39. Las rectas que unen los puntos medios de los lados opuestos de un cuadrilátero se bisectan mutuamente.

40. La suma de los ángulos de una estrella de cinco puntas o vértices es igual a 2 rectos.

41. Los dos segmentos extremos determinados en una recta por dos circunferencias concéntricas son iguales.

42. Las diagonales de un trapecio se cortan de tal modo que los segmentos adyacentes a la una base son proporcionales a los correspondientes adyacentes a la otra.

43. Dados los puntos medios de los lados de un triángulo, construír el triángulo.

44. Dividir un triángulo dado en dos partes equivalentes por una recta trazada por uno de los vértices.

45. Trazar a un círculo dado una tangente perpendicular a una recta dada.

46. Dividir una recta en dos partes tales que el cuadrado de la una sea igual a dos veces el cuadrado de la otra.

47. Si dos lados consecutivos de un exágono inscrito son paralelos a sus opuestos, los dos lados que quedan son paralelos.

48. Si por un punto cualquiera de la cuerda común de dos circunferencias que se cortan se trazan otras dos cuerdas, una en cada círculo, sus cuatro extremidades quedarán en otra circunferencia.

49. Si dos cuerdas se cortan en ángulo recto dentro de un círculo, la suma de los cuadrados de sus segmentos es igual al cuadrado del diámetro. Discútase el caso en que las cuerdas se cortan fuera del círculo o en la circunferencia.

50. La bisectriz de un ángulo cualquiera de un cuadrilátero inscrito y la del ángulo externo opuesto se cortan en la circunferencia.

51. Si de un punto cualquiera interior a un triángulo equilátero se bajan perpendiculares a los lados, su suma es constante.

52. Las alturas de un triángulo cualquiera se cortan de tal modo que el producto de los dos segmentos de cada una es igual al de los dos segmentos de cualquiera de las otras dos.

53. El área de un triángulo es igual al producto del semiperímetro por el radio del círculo inscrito.

54. El perímetro de un triángulo es a un lado cualquiera como la altura correspondiente a ese lado es al radio del círculo inscrito.

55. El área de un cuadrado dos de cuyos vértices están en la circunferencia y los otros dos en el diámetro de un círculo es $\frac{2}{5}$ del área del cuadrado inscrito.

56. Las diagonales de un cuadrilátero inscrito lo dividen en dos pares de triángulos semejantes.

57. Trazar una recta cuyo largo sea $\sqrt{7{,}5}$ cm.

58. Si de un mismo lado de una recta tomada como base se construyen dos triángulos equivalentes, toda paralela a aquélla determina en ellos áreas iguales.

59. Dividir un arco dado en dos partes cuyas cuerdas estén en una relación dada.

60. El área comprendida entre dos circunferencias concéntricas es igual al producto de la semisuma de éstas por la diferencia de los radios.

61. Hállese el largo de una correa tesa que une dos poleas de 54 cm. de diámetro, cuyos centros distan entre sí 2 m.

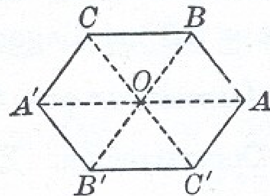
62. En la práctica se construye el eptágono regular inscrito tomando por lado la mitad del del triángulo equilátero inscrito Hágase la construcción. y véase si es exacta.

APÉNDICE

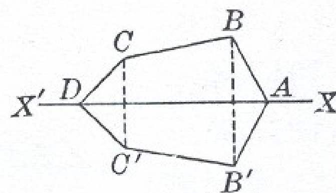
405. Asuntos tratados. De los muchos asuntos interesantes que se relacionan con los principios hasta aquí expuestos, se estudiarán en este apéndice, aunque sólo brevemente, dos de los más importantes: la teoría de la simetría y la de algunos valores máximos y mínimos.

406. Puntos simétricos. Dícese que dos puntos son *simétricos con respecto a otro*, llamado *centro de simetría*, si éste bisecta la recta que une los dos primeros.

Dos puntos son *simétricos con respecto a una recta*, llamada *eje de simetría*, si ésta es la perpendicular bisectriz de la recta que los une.

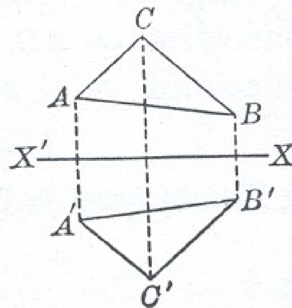


407. Figura simétrica. Dícese que una figura es *simétrica con respecto a un punto* si el punto bisecta toda recta que pasa por él y termina en el contorno de la figura.



Dícese que una figura es *simétrica con respecto a un eje* si el eje bisecta toda perpendicular a él limitada por el contorno de la figura.

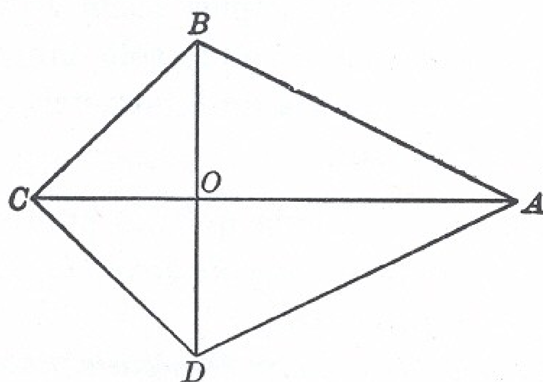
Es claro que esto sucede siempre que el eje divide la figura en dos partes superponibles por rotación sobre él.



408. Dos figuras simétricas. Dos figuras son *simétricas entre sí con respecto a un punto o a un eje* cuando todo punto de la una es simétrico con un punto de la otra.

PROPOSICIÓN I. TEOREMA

409. *Si dos lados contiguos de un cuadrilátero son iguales, y los otros también lo son, el cuadrilátero es simétrico con respecto a la diagonal que une los vértices de los ángulos formados por los lados iguales, y las diagonales se cortan en ángulo recto.*



Sea $ABCD$ un cuadrilátero en que $AB = AD$, $CB = CD$, y sean CA y BD las diagonales.

Demostrar que CA es un eje de simetría $\perp$ a BD.

Demostración. En los ⚠ ABC, ADC,

$AB = AD$, $CB = CD$, — Por hipót.

$CA = CA$; — Ident.

$\therefore$ los ⚠ son iguales; — N.° 80

$\therefore \angle BAC = \angle CAD$, y $\angle ACB = DCA$. — N.° 67

Luego si el $\triangle ABC$ se hace girar sobre AC hasta voltearlo, AB coincidirá con AD, CB con CD, y OB con OD; esto es, el $\triangle ABC$ coincidirá con el ADC.

Luego CA es un eje de simetría. — N.° 407

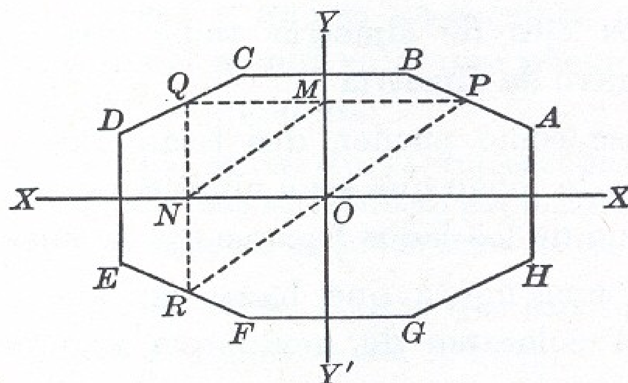
Puesto que, en la superposición, OB cae sobre OD,

$$\angle BOA = \angle AOD.$$

$\therefore$ BD es $\perp$ a CA (n.os 26, 27). — L. C. D. D.

Proposición II. Teorema

410. *Si una figura es simétrica con respecto a dos ejes perpendiculares entre sí, lo es también con respecto al punto de intersección de esos ejes.*



Sea *ABCDEFGH* una figura simétrica con respecto a los ejes *XX'*, *YY'*, que se cortan en ángulo recto en *O*.

Demostrar que O es el centro de simetría de la figura.

Demostración. Sea P un punto cualquiera del contorno de la figura.

Trácense $PMQ \perp$ a YY', y $QNR \perp$ a XX'. N.° 227

PQ es $\parallel$ a XX', y QR a YY'. N.° 95

Trácense PO, OR, MN.

Entonces se tendrá: $QN = NR$. N.° 407

Además, $QN = MO$; N.° 127

$\therefore NR = MO$; N.° 52, 7.°

$\therefore RO$ es igual y $\parallel$ a NM. N.° 130

Análogamente, OP es igual y $\parallel$ a NM;

$\therefore ROP$ es una recta. N.° 94

Así pues, el punto O bisecta toda recta que pasa por él y termina en el contorno de la figura.

Luego O es el centro de simetría de la figura (n.° 407). L. C. D. D.

EJERCICIO 72

1. Indíquense en una figura los ejes de simetría de un cuadrado.

2. Trácese un exágono regular y determínese qué rectas son ejes de simetría.

3. ¿Cuántos ejes de simetría tiene una circunferencia? ¿Cuál es su centro de simetría?

4. Muéstrese cómo pueden dos triángulos iguales cualesquiera colocarse de modo que sean simétricos con respecto a un eje. ¿Puede uno de los lados hacerse eje de simetría?

5. Trácese una figura que haga ver que dos triángulos iguales pueden colocarse de modo que sean simétricos con respecto a un punto.

6. Demuéstrese que dos figuras simétricas entre sí con respecto a un eje son iguales.

7. Dos figuras simétricas entre sí con respecto a un punto son iguales.

8. ¿Cuáles cuadriláteros tienen un eje de simetría?

9. ¿Cuáles cuadriláteros tienen centro de simetría?

10. ¿Qué clase de polígonos regulares tienen a la vez centro y ejes de simetría? Hágase ver esto en el exágono.

11. El centro de un círculo es centro de simetría, y todo diámetro es eje de simetría, de la circunferencia.

12. Demuéstrese que todo triángulo isósceles tiene un eje de simetría, y que por consiguiente los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales.

13. Dos tangentes trazadas por un punto a un círculo tienen un eje de simetría.

14. Las cuatro tangentes comunes a dos círculos forman con las circunferencias una figura simétrica con respecto a la línea de los centros.

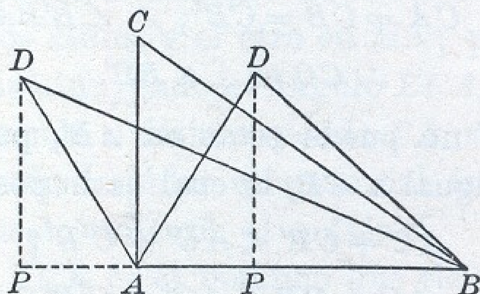
411. Máximos y mínimos. Cuando una magnitud geométrica u otra cantidad cualquiera está sujeta a satisfacer ciertas condiciones que no le impiden variar en otros respectos ni cambiar de valor, dícese que es un *máximo*, o que tiene su *valor máximo*, cuando tiene el mayor valor que puede tener sin dejar de satisfacer esas condiciones; y que es un *mínimo*, o tiene su *valor mínimo*, cuando tiene el menor valor que puede tener sin dejar de llenar las mismas condiciones.

En álgebra, por ejemplo, se resuelve el problema de dividir un número dado a en dos partes tales que su producto sea máximo. Aquí la condición que el producto debe llenar es que la suma de sus factores sea a.

412. Figuras isoperímetras. Dícese que dos figuras son *isoperímetras* cuando sus perímetros son iguales.

Proposición III. Teorema

413. *De todos los triángulos que tienen dos lados constantes, el de área máxima es el triángulo rectángulo cuyos catetos son esos dos lados.*



Sean ABC, ABD dos triángulos en que $CA = DA$ y $\angle BAC = 1$ rt.

Demostrar que área $ABC >$ área ABD.

Demostración. Trácese la altura DP. N.° 227

$DA > DP$. N.° 86

$DA = CA$; Por hipót.

$\therefore CA > DP$. N.° 52, 8.°

$\therefore$ área $ABC >$ área ABD (n.° 327). L. C. D. D

Proposición IV. Teorema

414. *De todos los triángulos isoperímetros de una misma base, el isósceles es el de área máxima.*

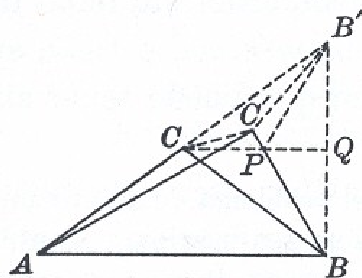


Fig. 1

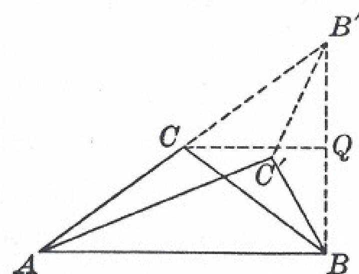


Fig. 2

Sean ABC, ABC' dos triángulos isoperímetros en que $AC = BC$ y AC' no es igual a BC'.

Demostrar que *área* $ABC >$ *área* ABC'.

Demostración. Prolónguese AC hasta B', haciendo $CB' = AC$.

Trácense BB' y $C'B'$, y $CQ \parallel$ a AB.

$AC = CB'$; $\therefore BQ = QB'$. N.° 135

También, $CA = CB = CB'$; $\therefore \angle B'BA = 1$ rt.; N.° 215

$\therefore CQ$ es $\perp$ a BB'. N.° 97

Ahora bien, C' no puede estar en AB', pues de otro modo $CC' + C'B$ sería igual a CB, lo cual es imposible. N.° 53, 1.°

$AC + CB' < AC' + C'B'$; N.° 112

$\therefore AC + CB < AC' + C'B'$;

$\therefore AC' + C'B (= AC + CB) < AC' + C'B'$; $\therefore C'B < C'B'$.

C' no está en CQ, pues de otro modo $C'B$ sería igual a $C'B'$. N.° 150

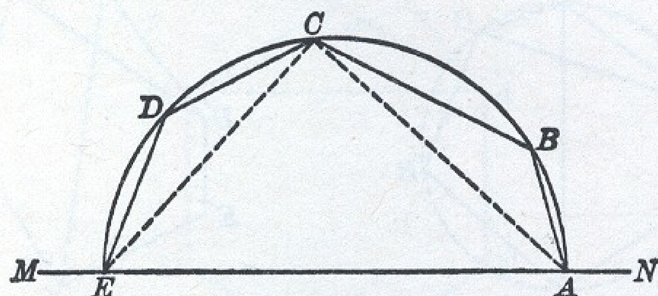
C' no puede estar arriba de CQ (fig. 1), pues de otro modo $C'B'$, $< C'P + PB'$, sería menor que $C'B$, $= C'P + PB'$.

Luego C' está abajo de CQ (fig. 2).

Luego área $ABC >$ área ABC' (n.° 327). L.C.D.D.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA

415. *De los polígonos en que todos los lados menos uno son constantes, el máximo es el inscriptible en un semicírculo cuyo diámetro es el lado variable.*



Sea *ABCDE* el polígono máximo cuyos lados constantes son *AB*, *BC*, *CD*, *DE*, y cuyo lado variable está en la recta *MN*.

Demostrar que ABCDE es inscriptible en un semicírculo de diámetro EA.

Demostración. Por cualquier vértice C trácense las diagonales CA, CE.

El $\triangle ACE$ debe ser el máximo de todos los que tienen CE y CA por dos de los lados, y el otro en MN; pues de otro modo, aumentando o disminuyendo el ángulo ECA, sin alterar CE ni CA, pero aumentando o disminuyendo EA, se podría aumentar el área de ACE, sin cambiar el resto del área del polígono, y el polígono supuesto no sería el máximo.

Así pues el $\triangle ACE$ es el máximo que tiene dos de sus lados iguales a CE y CA respectivamente, y su otro lado en MN.

Luego el $\triangle ACE$ es rectángulo. N.º 413

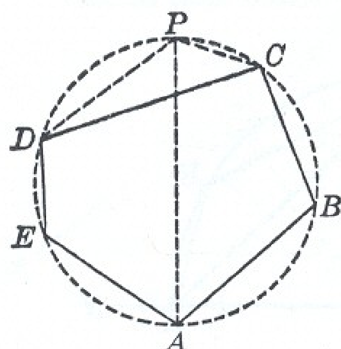
Por tanto, el vértice C está situado sobre la semicircunferencia descrita sobre EA como diámetro. N.º 215

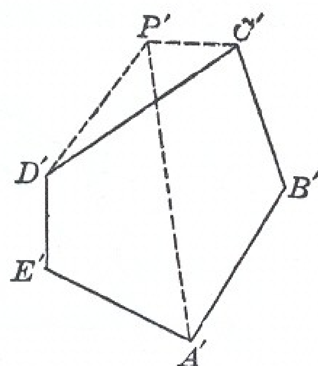
De igual manera puede demostrarse que todos los otros vértices están situados sobre la misma semicircunferencia.

Luego el polígono máximo es el inscriptible en un semicírculo cuyo diámetro es el lado variable. L. Q. D. D

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA

416. *De todos los polígonos de lados dados, el inscriptible es el máximo.*





Sean *ABCDE* un polígono inscrito cualquiera, y *A'B'C'D'E'* un polígono no inscriptible cuyos lados son respectivamente iguales a los del primero.

Demostrar que $ABCDE > A'B'C'D'E'$.

Demostración. Trácense un diámetro AP por uno de los vértices, y las cuerdas CP y PD.

Sobre $C'D'$, igual a CD, constrúyase el $\triangle C'P'D'$ igual al CPD, y trácese $A'P'$.

Como por hipótesis $A'B'C'D'E'$ no es inscriptible, una de las partes $A'P'D'E'$, $A'B'C'P'$ o ambas son ininscriptibles en el semicírculo descrito sobre $A'P'$ como diámetro.

Ninguna de estas partes puede ser mayor que su correspondiente en la otra figura, según el teorema anteriormente demostrado. N.° 415

Por tanto, de las partes $A'P'D'E'$, $A'B'C'P'$, una por lo menos debe ser menor que su correspondiente en la otra figura, y la otra puede ser igual a su correspondiente, pero no mayor.

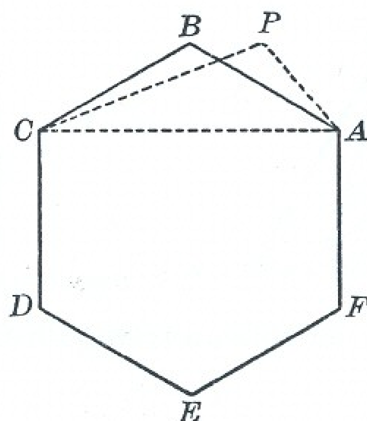
$$\therefore ABCPDE > A'B'C'P'D'E';$$

de donde, restando los dos $\triangle$ iguales CPD, $C'P'D'$,

$$ABCDE > A'B'C'D'E' \qquad \text{L. C. D. D.}$$

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

417. *De todos los polígonos isoperímetros de un mismo número de lados, el equilátero es el máximo.*



Sea *ABCDEF* el máximo de los polígonos isoperímetros de *n* lados.

Demostrar que el polígono es equilátero.

Demostración. Trácese AC.

El $\triangle ABC$ debe ser el mayor de los isoperímetros construídos sobre AC. De otro modo podría reemplazarse ABC por un triángulo mayor APC del mismo perímetro, y esto daría un polígono mayor que $ABCDEF$, lo que es contra el supuesto de que éste es el máximo.

Luego el $\triangle ABC$ es isósceles; N.° 414

$$\therefore AB = BC.$$

De igual manera.

$$BC = CD,\ CD = DE, \text{ etc.}$$

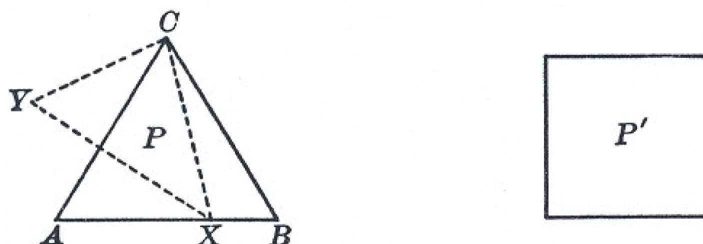
Luego el polígono $ABCDEF$ es equilátero. L. C. D. D.

418. COROLARIO. *El máximo de los polígonos isoperímetros de un mismo número de lados es regular.*

En efecto, el polígono máximo, siendo a la vez equilátero (n.° 417) e inscriptible (n.° 416), es regular (n.° 365).

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA

419. *De varios polígonos regulares isoperímetros, el mayor es el que tiene mayor número de lados.*



Sean P y P' respectivamente un triángulo equilátero y el cuadrado isoperímetro.

Demostrar que $P' > P.$

Demostración. De un punto cualquiera X de AB, trácese al vértice C la recta XC.

Inviértase el $\triangle AXC$, y llévese a la posición CXY, en que $CY = XA$, y $XY = AC$.

$XBCY$ es un cuadrilátero irregular que tiene el mismo perímetro que P' y la misma área que P.

El cuadrado P', siendo regular, es mayor que su isoperímetro $XBCY$. N.° 418

Así pues, un polígono regular de cuatro lados es mayor que el isoperímetro regular de tres.

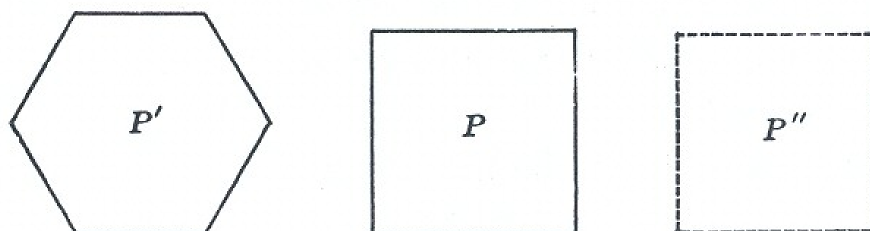
Puede demostrarse de manera análoga que el cuadrado es menor que el pentágono regular isoperímetro, y así sucesivamente. L.C.D.D.

Pueden darse como ejemplo el triángulo equilátero y el cuadrado de perímetro p. En el triángulo la base es $\frac{1}{3}p$, la altura es $\frac{1}{6}p\sqrt{3}$, y el área es $\frac{1}{36}p^2\sqrt{3}$, o cerca de $0{,}048\,p^2$. En el cuadrado el lado es $\frac{1}{4}p$, y el área es $\frac{1}{16}p^2$, ó $0{,}0625\,p^2$.

Puesto que el perímetro de un polígono regular tiende hacia la circunferencia a medida que aumenta el número de lados, síguese que *de todas las figuras planas isoperímetras el círculo tiene el área máxima.*

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA

420. *De varios polígonos regulares de una misma área, el de más lados tiene menor perímetro.*



Sean P, P' dos polígonos regulares de igual área, y de los cuales P' tiene mayor número de lados.

Demostrar que el perímetro de P es mayor que el de P'.

Demostración. Supóngase un polígono regular P'' que tenga el mismo perímetro que el P' y el mismo número de lados que el P.

Sean l y l'' los lados de P y P'' respectivamente.

$$P' > P''; \qquad \text{N.° 419}$$

$$P = P'; \qquad \text{Por hipót.}$$

$$\therefore P > P''.$$

Tiénese además,

$$\frac{P}{P''} = \frac{l^2}{l''^2}; \qquad \text{N.° 374}$$

$$\therefore l > l''.$$

$$\therefore \text{perímetro de } P > \text{perímetro de } P''.$$

$$\therefore \text{perímetro de } P > \text{perímetro de } P'. \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Tómense como ejemplo un triángulo equilátero y un cuadrado, ambos de área a^2. El lado del cuadrado es a, y el perímetro $4\,a$. El área del triángulo equilátero es $\frac{1}{4}\,l^2\sqrt{3}$; por tanto, $\frac{1}{4}\,l^2\sqrt{3} = a^2$, de donde $l = \dfrac{2\,a}{\sqrt[4]{3}} = 1{,}5\,a$, próximamente; de suerte que el perímetro del triángulo es aproximadamente $4{,}5\,a$, que es mayor que el del cuadrado.

EJERCICIO 73

Máximos y mínimos

1. De todos los paralelogramos equivalentes de igual base, el rectángulo tiene el menor perímetro.

2. De todos los rectángulos equivalentes, el cuadrado tiene el menor perímetro.

3. De todos los triángulos de iguales base y altura, el isósceles tiene el menor perímetro.

4. De todos los triángulos inscriptibles en un círculo dado, el equilátero es el máximo y tiene el mayor perímetro.

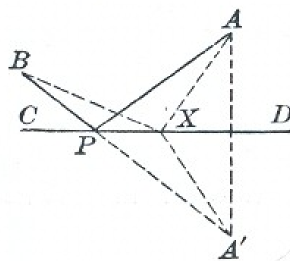
5. Inscribir en un semicírculo el rectángulo máximo.

6. Hállese el área del triángulo máximo inscrito en un semicírculo de 3 cm. de radio.

7. De todos los polígonos de un número de lados dado que pueden inscribirse en un círculo dado, el regular es de área y perímetro máximos.

8. De todos los polígonos de un número dado de lados circunscriptibles a un círculo dado, el regular es de área y perímetro mínimos.

9. Hállese sobre una recta dada un punto tal que la suma de sus distancias a dos puntos dados sea mínima. Discútase el problema para diferentes posiciones de los dos puntos dados con respecto a la recta.



Si los dos puntos están de un mismo lado de la recta, ¿qué se sabe de $AP + PB$ comparada con $A'B$? ¿de $A'B$ comparada con $AX + XB$? ¿y de ésta con $AX + XB$?

10. Dividir una recta dada en dos partes tales que la suma de sus cuadrados sea máxima.

11. Dividir una recta dada en dos segmentos cuyo producto sea máximo.

GEOMETRÍA DEL ESPACIO

LIBRO VI

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

421. Geometría del espacio. En la geometría plana se trata de figuras cuyas partes están todas en un mismo plano. En la *geometría del espacio* se trata de figuras de tres dimensiones, y de las propiedades y relaciones de las líneas y superficies en general.

422. Plano. Llámase *superficie plana*, o *plano*, una superficie tal que la recta que une dos cualesquiera de sus puntos tiene todos sus otros puntos en la misma superficie.

Todo plano se supone de extensión ilimitada, mas es costumbre representar un plano por un rectángulo en perspectiva.



423. Determinación de un plano. Dícese que ciertos puntos o líneas *determinan* un plano si el plano los contiene y ningún otro plano puede contenerlos todos.

Cuando decimos que *trazamos* o *hacemos pasar* un plano por ciertos puntos o líneas, queremos decir que por ellos puede pasar un piano, y que se trata de él.

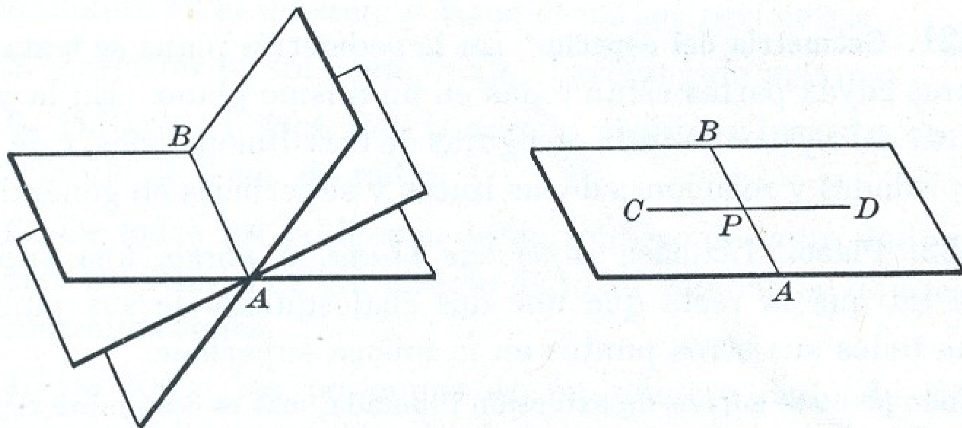
Cuando de un punto exterior a un plano se traza una recta a él, el punto en que ella lo encuentra se llama *pie* de la recta.

424. Intersección de dos planos. Llámase *intersección* de dos planos la línea que contiene todos los puntos comunes a los dos.

425. Postulado del plano. Al postulado de que por dos puntos puede trazarse una recta, y sólo una, corresponde el siguiente relativo al plano:

Por dos rectas que se cortan puede hacerse pasar un plano, y sólo uno.

En la primera de las dos figuras siguientes se ve que un plano puede hacerse girar sobre una recta, como AB, y tomar así varias posiciones. Si otra recta CD corta AB en P, como en la segunda figura, cuando el plano en su rotación pasa por C debe también pasar por D, puesto que contiene los puntos C y P de la recta CD (n.º 422). Si continúa girando, dejará de contener el punto C.



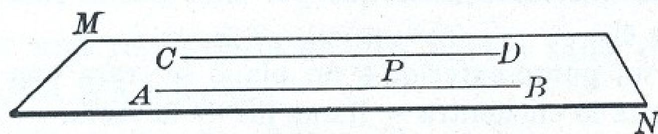
426. Corolario 1.º *Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano.*

Así, AB y C determinan un plano.

427. Corolario 2.º *Tres puntos no situados en línea recta determinan un plano.*

En efecto, uno de ellos y los otros dos determinan dos rectas que se cortan (n.º 425).

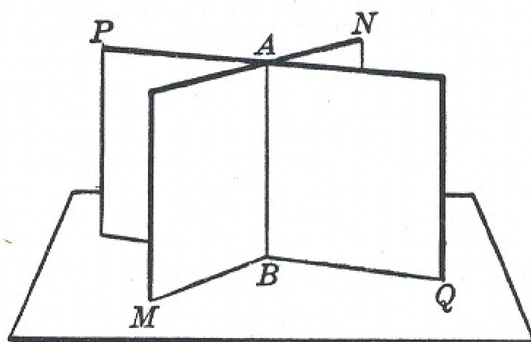
428. Corolario 3.º *Dos paralelas determinan un plano.*



En efecto, dos paralelas están en un mismo plano (n.º 93), y una de ellas y un punto P de la otra determinan un plano (n.º 426).

PROPOSICIÓN I. TEOREMA

429. *La intersección de dos planos es una recta.*



Sean *MN*, *PQ* dos planos que se cortan.

Demostrar que la intersección de estos dos planos es una línea recta.

Demostración. Sean A y B dos puntos cualesquiera pertenecientes a la intersección.

Trácese la recta AB.

Todos los puntos de AB están en ambos planos. N.° 422

(*Síguese esto de que AB tiene dos puntos en cada plano.*)

Ningún punto exterior a AB puede estar en ambos planos; pues sólo un plano puede pasar por una recta y un punto exterior a ella. N.° 426

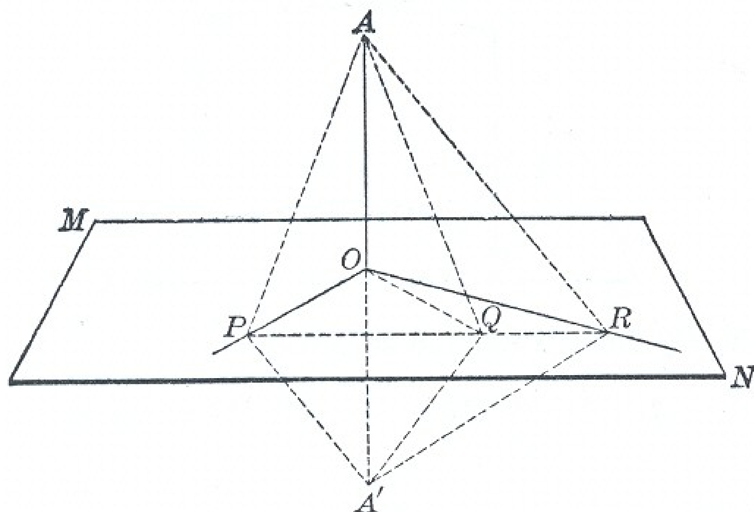
Luego la recta AB contiene todos los puntos comunes a los dos planos, y es por tanto la intersección de los dos planos (n.° 424). L.C.D.D

¿Qué teorema de geometría plana corresponde a éste?

430. Perpendicular a un plano. Dícese que una recta trazada por un punto exterior a un plano y que encuentra el plano es *perpendicular al plano* cuando lo es a todas las rectas del plano que pasan por su pie. Dícese entonces que el plano es también perpendicular a la recta, y que el plano y la recta son perpendiculares entre sí.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA

431. *Si una recta es perpendicular a otras dos en su punto de intersección, lo es al plano que determinan.*



Sea AO una perpendicular en O a las rectas OP, OR.

Demostrar que AO es $\perp$ al plano MN de estas rectas.

Demostración. Por O trácese una recta cualquiera OQ en el plano MN, y otra PR que corte OP, OQ, OR en P, Q, R.

Prolónguese AO hasta A', haciendo $OA' = OA$, y trácense AP, AQ, AR y $A'P$, $A'Q$, $A'R$.

OP y OR son $\perp$s a AA' en su punto medio;

$\therefore AP = A'P$, y $AR = A'R$; N.º 150

$\therefore \triangle APR = \triangle A'PR$; N.º 80

$\therefore \angle RPA = \angle A'PR$; N.º 67

o sea, $\angle QPA = \angle A'PQ$;

$\therefore \triangle PQA = \triangle PQA'$; N.º 68

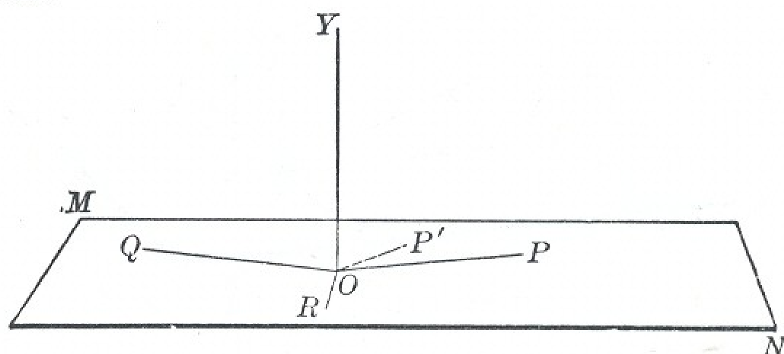
$\therefore AQ = A'Q$ (n.º 67), y OQ es $\perp$ a AA' en O; N.º 151

$\therefore AO$ es $\perp$ a toda recta del plano MN trazada por O.

$\therefore AO$ es $\perp$ al plano MN (n.º 430). L.C.D.D.

PROPOSICION III. TEOREMA

432. *Todas las perpendiculares a una recta en un mismo punto están en un plano perpendicular a ella en ese punto.*



Sea *MN* un plano perpendicular a la recta *OY* en *O*.

Demostrar que OP, una perpendicular cualquiera a OY en C, está en el plano MN.

Demostración. Supóngase que el plano de OY y OP corta el MN en OP'. Entonces OY es $\perp$ a OP' N.° 430

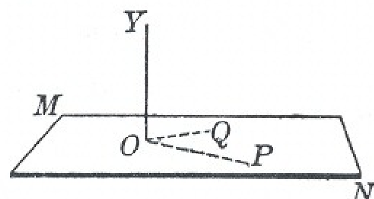
En el plano POY puede trazarse a OY en O sólo una $\perp$; N.° 57

$\therefore$ OP y OP' coinciden, y OP está en el plano MN.

$\therefore$ toda $\perp$ a OY en O, como OQ, OR, está en MN. L.C.D.D.

433. COROLARIO 1.° *Por un punto de una recta puede pasar un plano, y sólo uno, perpendicular a ella.*

434. COROLARIO 2.° *Por un punto exterior a una recta puede pasar un plano, y sólo uno, perpendicular a ella.*



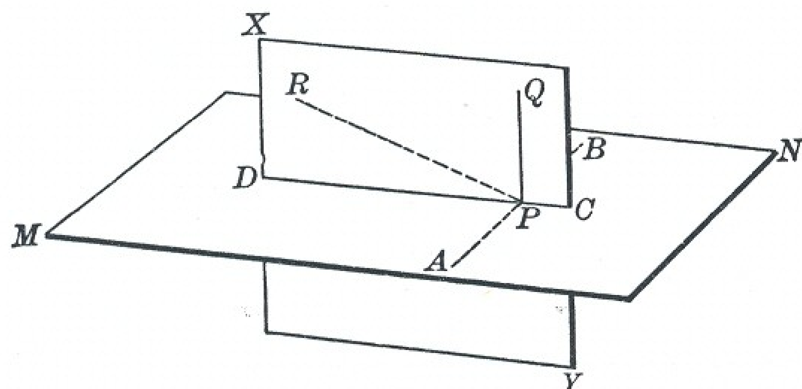
Sea P un punto exterior a la recta OY. Trácense PO y OQ $\perp$s a OY. Estas rectas determinan un plano $MN \perp$ a OY en O.

Sólo un plano tal puede haber; pues sólo una $\perp$ puede trazarse de P a OY (n.° 82).

435. Oblicua a un plano. Dícese que una recta es *oblicua* a un plano cuando lo encuentra sin ser perpendicular a él.

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA

436. *Por un punto cualquiera de un plano puede trazarse al plano una perpendicular, y sólo una.*



Sea *P* un punto cualquiera del plano *MN*.

Demostrar que por P puede trazarse a MN una perpendicular, y sólo una.

Demostración. Trácense por P una recta cualquiera AB en MN, y un plano $XY \perp$ a AB, el cual cortará a MN según una recta CD. N.° 433

Por P, y en el plano XY, trácese $PQ \perp$ a CD.

Puesto que AB es por construcción $\perp$ a XY, lo es también a PQ, que pasa por su pie en el plano XY. N.° 430

Luego PQ, siendo $\perp$ a AB, y a CD por construcción, lo es al plano MN. N.° 431

Cualquiera otra recta PR trazada por P es oblicua a MN. En efecto, PQ y PR determinan un plano. Para evitar confusión, supongamos ahora que XY es el plano de PQ y PR, y sea CD su intersección con MN.

Puesto que PQ es $\perp$ a MN, lo es a CD; N.° 430

$\therefore PR$ es oblicua a CD; N.° 57

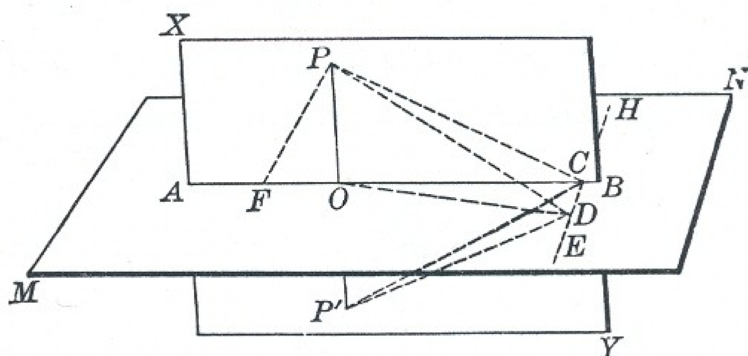
$\therefore PR$ es oblicua a MN. N.os 430, 435

$\therefore PQ$ es la única perpendicular a MN en P. L.C.D.D

¿Qué teorema corresponde a éste en geometría plana?

Proposición V. Teorema

437. *Por un punto exterior a un plano puede trazarse al plano una perpendicular, y sólo una.*



Sea P un punto exterior al plano MN.

Demostrar que por P puede trazarse una $\perp$ a MN, y sólo una.

Demostración. Trácese en MN una recta cualquiera EH, y por P un plano $XY \perp$ a EH (n.° 434), que corte a ésta en C y al plano MN en AB.

Trácense $PO \perp$ a AB en O, y una recta cualquiera OD de O a EH. Prolónguese PO hasta P', haciendo $OP' = OP$, y trácense PC, PD, $P'C$, $P'D$.

Los $\measuredangle s\, PCD, P'CD$ son rectos. N.° 430

$DC = DC$, y $PC = P'C$; N.° 150

$\therefore \triangle PCD = \triangle P'CD$; N.° 69

$\therefore PD = P'D$ (n.° 67), y OD es $\perp$ a PP' en O; N.° 151

$\therefore PO$ es $\perp$ a MN, siéndolo a OD y AB. N.° 431

Cualquiera otra recta PF trazada de P a MN es oblicua a MN. (Demuéstrese esto.)

$\therefore PO$ es la única $\perp$ que puede trazarse a MN por P. L. C. D. D.

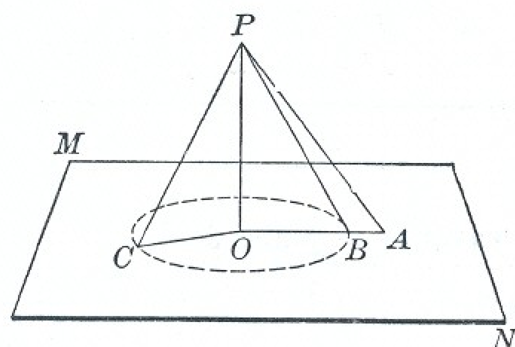
438. Corolario. *La perpendicular es la recta más corta entre un punto y un plano.*

La *distancia* del punto al plano es la longitud de esta perpendicular.

†

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA

439. *Si de un punto exterior a un plano se trazan a él varias oblicuas y una perpendicular, todas las oblicuas cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular son iguales; y de dos oblicuas cuyos pies no equidistan del de la perpendicular, la del pie más distante es la mayor.*



Sean PO una perpendicular al plano MN, y PA, PB, PC oblicuas, y supóngase $OB = OC$, $OA > OC$.

Demostrar que $PB = PC$, y $PA > PC$.

Demostración. En los △ OBP, OCP,

$OP = OP$, Ident.

$OB = OC$, Por hipót.

$\angle BOP = \angle POC$; N.° 56

∴ los △ OBP, OCP son iguales; N.° 69

∴ $PB = PC$. N.° 67

Supóngase que A, B y O están en línea recta.

Entonces se tiene: $OA > OC$; Por hipót

∴ $OA > OB$.

(*Síguese esto de que, según el supuesto,* $OC = OB$.)

∴ $PA > PB$. N.° 84

∴ $PA > PC$ $(= PB)$. L.C.D.D

¿Cuál es el teorema correspondiente de la geometría plana?

440. Corolario 1.° *Todas las oblicuas iguales trazadas a un plano por un punto exterior encuentran el plano a distancias iguales del pie de la perpendicular bajada del punto al plano; y de dos oblicuas desiguales, el pie de la mayor dista más del pie de la perpendicular.*

Si en la figura anterior se supone $PB = PC$, y se tiene en cuenta que los ángulos en O son rectos, ¿qué se deduce en cuanto a los ≙ OBP, OCP, y a las rectas OB, OC?

Además, si $PA > PC$, ¿qué se sigue en cuanto a PA comparada con PB? ¿y en cuanto a OA comparada con OB?

¿Qué se sigue de aquí en cuanto a OA comparada con OC?

441. Corolario 2.° *El lugar geométrico de todos los puntos del espacio equidistantes de todos los de una circunferencia es la perpendicular al plano de la circunferencia en el centro de ésta.*

En la figura de la página 280, ¿qué debe demostrarse con respecto a todo punto de PO, y qué con respecto a todo punto exterior a PO? (N.° 148.)

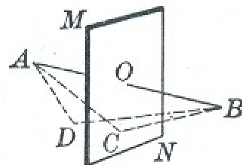
442. Corolario 3.° *El lugar geométrico de un punto equidistante de los vértices de un triángulo es la perpendicular al plano del triángulo en el centro del círculo circunscrito.*

¿Por qué se deduce esto del corolario 2.°?

¿De qué es lugar geométrico la perpendicular al plano en el centro del círculo inscrito?

443. Corolario 4.° *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos puntos dados es el plano que pasa por el punto medio de la recta determinada por estos dos puntos y es perpendicular a ella.*

Todo punto, como C, de tal plano está en una perpendicular a AB en su punto medio O (n.° 430). ¿Qué relación hay pues entre CA y CB? (N.° 150.)

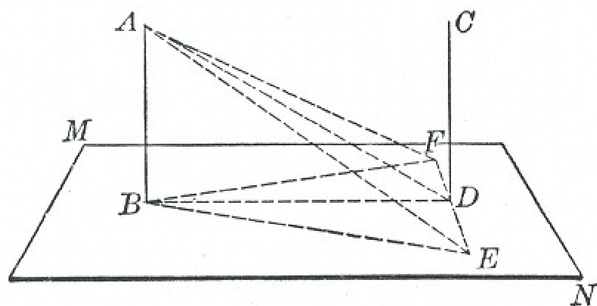


Ningún punto D exterior al plano MN puede estar en una perpendicular a AB en O. ¿Qué se deduce de aquí en cuanto a las distancias de D a A y B? (N.° 150.)

¿Cuál es el teorema correspondiente a éste en la geometría plana? ¿En qué difieren las dos demostraciones?

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

444. *Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas.*



Sean *AB*, *CD* dos rectas perpendiculares al plano *MN*.

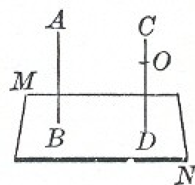
Demostrar que AB y CD son paralelas.

Demostración. Trácense AD, BD, y en MN trácese por D la $\perp$ EF a BD, y hágase $DE = DF$. Trácense BE, AE, BF, AF.

Demuéstrese que los $\triangle BDE$, BDF son iguales (n.° 69), que $\angle ADE = \angle ADF = 1$ rt. (n.° 80), y que BD, CD, AD están en un mismo plano (n.° 432).

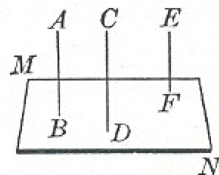
AB está en el mismo plano,	N.° 422
y AB, CD son $\perp$s a BD.	N.° 430
$\therefore$ AB es paralela a CD (n.° 95).	L.C.D.D.

445. COROLARIO 1.° *Si una de dos paralelas es perpendicular a un plano, la otra también lo es.*



En efecto, si por un punto cualquiera O de CD se traza una $\perp$ a MN, ¿en qué relación estará con AB? (N.° 444.) Aplíquese ahora el n.° 94.

446. COROLARIO 2.° *Dos rectas paralelas a una tercera lo son entre sí.*



El plano MN $\perp$ a CD es $\perp$ a AB y EF (n.° 445).

447. Recta y plano paralelos entre sí. Dícese que una recta y un plano son *paralelos* cuando no se encuentran por más que se prolonguen.

EJERCICIO 74

1. ¿Por qué se obtiene un borde recto cuando se dobla una hoja de papel?

2. Si de un punto exterior se trazan a un plano oblicuas iguales y una perpendicular, las oblicuas formarán ángulos iguales con las rectas trazadas por sus pies y el de la perpendicular.

3. Si por el pie de una perpendicular a un plano se traza una perpendicular a cualquiera recta R del plano, toda recta que pase por la intersección de estas dos y corte la perpendicular al plano es perpendicular a la R.

4. Si por un punto exterior a un plano se trazan una perpendicular al plano y otra recta perpendicular a una recta R del plano, la que une los pies de las dos perpendiculares es perpendicular a la R.

5. De dos vértices de un triángulo se trazan perpendiculares a los lados opuestos, y por su intersección, una perpendicular al plano del triángulo. Toda recta trazada de esta perpendicular a uno de los vértices es perpendicular a la trazada por ese vértice paralela al lado opuesto.

6. Hállese en un plano un punto tal que la suma de sus distancias a dos puntos fijos exteriores situados de un mismo lado del plano sea mínima.

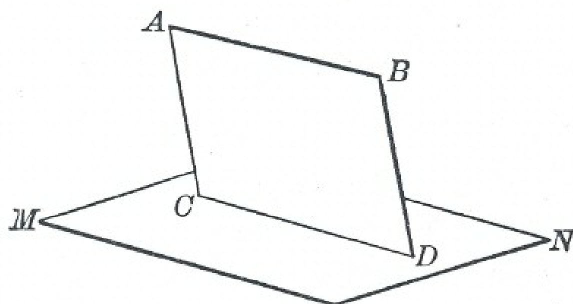
Por uno de los puntos, A, trácese $AO \perp$ al plano, y prolónguese hasta A' de suerte que $AO = A'O$. Únanse A' y el otro punto, B, por una recta, que cortará al plano en P. BPA es la línea mínima.

7. Si se trazan a un plano tres oblicuas iguales por un punto exterior, la perpendicular bajada del mismo punto al plano lo encuentra en el centro del círculo circunscrito al triángulo cuyos vértices son los pies de las oblicuas.

8. Enúnciense y demuéstrense los teoremas de la geometría plana correspondientes a los de los n.ºs 444, 445, 446. ¿Por qué no son aplicables a éstos las demostraciones de aquéllos?

Proposición VIII. Teorema

448. *Si dos rectas son paralelas, todo plano que contiene una sola de ellas es paralelo a la otra.*



Sean *AB, CD* dos rectas paralelas, y *MN* un plano que contiene la *CD* pero no la *AB*.

Demostrar que el plano MN es paralelo a AB.

Demostración. AB y CD están en un mismo plano AD. N.° 93

Este plano corta el MN en CD. Por hipót.

La recta AB, por mucho que se prolongue, permanece siempre en el plano AD. N.° 422

Luego, si la recta AB encuentra la MN, debe hacerlo en algún punto de CD. N.° 422

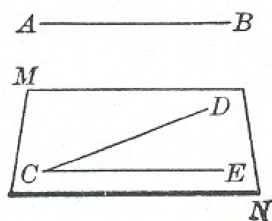
Como AB es $\parallel$ a CD, Por hipót.

AB no puede encontrar a CD; N.° 93

$\therefore$ AB no puede encontrar al plano MN.

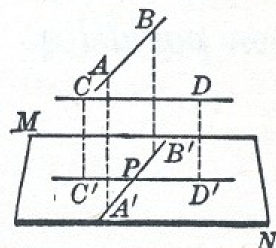
$\therefore$ MN es paralelo a AB (n.° 447). L.C.D.D.

449. Corolario 1.° *Por cada una de dos rectas no situadas en un mismo plano puede hacerse pasar un plano paralelo a la otra, y sólo uno.*



Sean AB y CD las rectas, CE una $\parallel$ a AB, y MN el plano de CE y CD. ¿Qué se sabe del plano MN con respecto a AB? ¿Por qué no puede haber otro plano que satisfaga las mismas condiciones?

450. CoROLARIO 2.° *Por un punto cualquiera puede trazarse un plano, y sólo uno, paralelo a dos rectas dadas cualesquiera del espacio.*



Sean P un punto cualquiera, y AB, CD las rectas dadas. Si por P se trazan $A'B' \parallel$ a AB, y $C'D' \parallel$ a CD, estas dos ‖s determinarán un plano MN (n.° 425). ¿Qué puede decirse del plano MN con respecto a AB y CD? ¿Por qué no puede hacerse pasar por P otro plano que llene las mismas condiciones?

En la figura del n.° 449, el ángulo DCE se dice ser el ángulo entre AB y CD. Análogamente, en la figura del n.° 450, $B'PD'$ es el ángulo entre AB y CD. En general, llámase *ángulo de dos rectas* cualesquiera del espacio el formado por dos rectas que se cortan y son respectivamente paralelas a aquéllas; o, lo que es lo mismo, el formado por una de las rectas con otra trazada por un punto cualquiera de ella paralela a la otra.

451. Planos paralelos. Dícese que dos planos son *paralelos*, o *paralelos entre sí*, cuando no se encuentran, por más que se extiendan en todos sentidos.

EJERCICIO 75

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de dos rectas paralelas trazadas en el mismo plano? ¿Cuál es el lugar geométrico correspondiente en el espacio, si se dan dos planos paralelos en vez de dos rectas? Trácese la figura del caso.

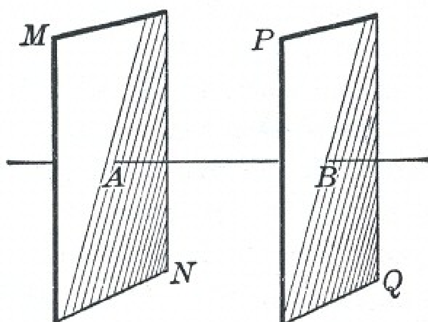
2. ¿Cuál es, en un plano, el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto exterior dado? ¿Cuál es el caso correspondiente en la geometría plana?

3. Si una recta es paralela a un plano, también es paralela a la intersección de dicho plano con cualquier otro plano que contenga la recta.

4. Si una recta es paralela a un plano, toda recta paralela a aquélla trazada por un punto del plano está contenida en el plano.

PROPOSICIÓN IX. TEOREMA

452. *Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos.*



Sean *MN*, *PQ* dos planos perpendiculares a la recta *AB*.

Demostrar que MN y PQ son paralelos.

Demostración. Si MN y PQ se encontrasen, serían dos planos bajados de un mismo punto perpendiculares a una misma recta.

Esto es imposible. N.° 434

$\therefore$ MN y PQ son paralelos (n.° 451). L. C. D. D.

EJERCICIO 76

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de dos puntos fijos A y B y también de otros dos puntos fijos C y D?

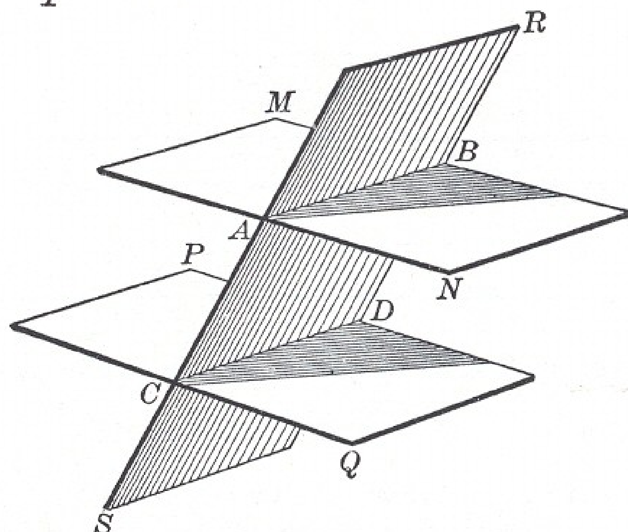
2. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos del espacio cuyas distancias a dos planos dados P y P' son d y d' respectivamente?

3. ¿Cuál es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de dos puntos fijos A y B y cuya distancia a un plano dado es d?

4. Determinar un punto cuyas distancias a dos planos dados sean d y d' y que equidiste de dos puntos dados. ¿Puede haber más de un punto tal?

Proposición X. Teorema

453. *Si un plano corta dos planos paralelos, las intersecciones son paralelas.*



Sean *AB*, *CD* las intersecciones de dos planos paralelos *MN*, *PQ* con un plano *RS*.

Demostrar que *AB es paralela a CD.*

Demostración. *AB*, *CD* están en el plano *RS*. Si se encontraran, *MN* y *PQ* se encontrarían, puesto que *AB* está siempre en *MN*, y *CD* en *PQ*. N.° 422

Pero *MN* y *PQ* no se encuentran. N.° 451

∴ *AB* es paralela a *CD* (n.° 93). L. C. D. D.

454. Corolario 1.° *Los segmentos de paralelas interceptados por planos paralelos son iguales.*

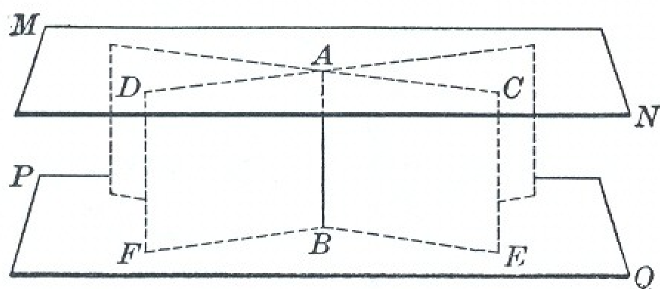
En la figura anterior, supóngase *AC* ∥ a *BD*. ¿Qué relación hay entre las rectas en que el plano de *AC* y *BD* corta los *MN* y *PQ*? ¿Qué clase de figura es *ACDB*?

455. Corolario 2.° *Dos planos paralelos equidistan en todos sus puntos.*

Por puntos cualesquiera de *MN* trácense perpendiculares a *PQ*. Demuéstrese que son paralelas y por tanto iguales.

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA

456. *Si una recta es perpendicular a uno de dos planos paralelos, es perpendicular al otro.*



Sea AB una perpendicular al plano MN, paralelo al PQ.

Demostrar que AB *es perpendicular a* PQ.

Demostración. Por AB trácense dos planos AE, AF, que corten MN en AC y AD, y PQ en BE y BF.

AC es ∥ a BE, y AD a BF	N.º 453
Como AB es $\perp$ a AC y AD,	N.º 430
es $\perp$ a BE y BF,	N.º 97
y por tanto al plano PQ (n.º 431).	L.C.D.D.

457. COROLARIO 1.º *Por un punto cualquiera puede trazarse un plano, y sólo uno, paralelo a un plano dado.*

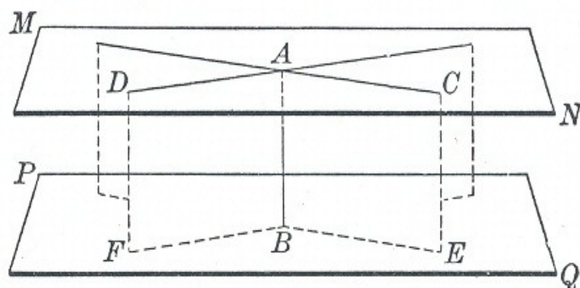
¿Qué se sabe con respecto a PQ y un plano trazado por $A \perp$ a AB? Aplíquese ahora el n.º 433.

458. COROLARIO 2.º *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos planos paralelos es un plano paralelo a ellos trazado por el punto medio de una cualquiera de sus perpendiculares comunes.*

459. COROLARIO 3.º *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de dos paralelas es un plano perpendicular a cualquier perpendicular común a ellas, trazado por el punto medio de esa perpendicular.*

Proposición XII. Teorema

460. *Si dos rectas que se cortan son paralelas a un plano, el plano que determinan también es paralelo al primer plano.*



Sean *AC, AD* dos paralelas al plano *PQ* que se cortan en *A* y determinan el plano *MN*.

Demostrar que MN es paralelo a PQ.

Demostración. Trácese $AB \perp$ a PQ.

Sea BE la intersección de PQ con el plano determinado por las rectas AB y AC.

Sea BF la intersección de PQ con el plano determinado por las rectas AB y AD.

AB es $\perp$ a BE y BF. N.º 430

AC y BE están en un mismo plano. Por constr.

Ahora bien, AC no puede cortar BE sin encontrar al plano PQ, en que BE está situada.

AC no puede encontrar al plano PQ, por suponerse que AC es paralela a dicho plano.

$\therefore BE$ es $\parallel$ a AC. N.º 93

Análogamente,

BF es $\parallel$ a AD;

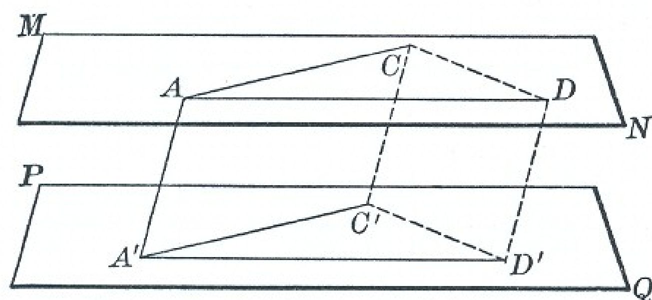
$\therefore AB$ es $\perp$ a AC y AD; N.º 97

$\therefore AB$ es $\perp$ a MN. N.º 431

$\therefore MN$ es paralelo a PQ (n.º 452). L.C.D.D.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

461. *Si dos ángulos del espacio tienen sus lados respectivamente paralelos y de un mismo lado de la recta que une sus vértices, los ángulos son iguales y sus planos son paralelos.*



Sean A, A' dos ángulos cuyos planos son MN y PQ respectivamente, y cuyos lados son paralelos respectivamente y están situados de un mismo lado de la recta AA'.

Demostrar que $\angle A = \angle A'$, *y que* MN *es* $\parallel$ *a* PQ.

Demostración. Háganse $AD = A'D'$, $AC = A'C'$.

Trácense DD', CC', CD, $C'D'$.

Puesto que AD es igual y $\parallel$ a $A'D'$,

AA' es igual y $\parallel$ a DD'. N.° 130

Asímismo, AA' es igual y $\parallel$ a CC';

$\therefore$ DD' y CC' son iguales, N.° 52, 7.°

y DD' y CC' son paralelas; N.° 446

$\therefore$ $CD = C'D'$; N.° 130

$\therefore$ los $\triangle ADC$, $A'D'C'$ son iguales; N.° 80

$\therefore$ $\angle A = \angle A'$. N.° 67

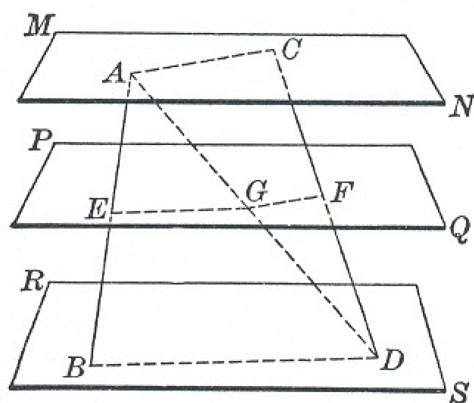
Ahora bien, MN es $\parallel$ a $A'C'$ y a $A'D'$. N.° 448

$\therefore$ MN es $\parallel$ a PQ (n.° 460). L. C. D. D.

¿Por qué no se aplica aquí la demostración de la proposición correspondiente de geometría plana?

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA

462. *Los segmentos determinados en dos rectas por tres planos paralelos son proporcionales.*



Sean *MN*, *PQ*, *RS* tres planos paralelos que cortan las rectas *AB* y *CD* en los puntos *A*, *E*, *B*, y *C*, *F*, *D* respectivamente.

Demostrar que $AE : EB = CF : FD$.

Demostración. Trácese AD, y sea G el punto en que encuentra al plano PQ.

El plano determinado por AB y AD corta los planos PQ y RS en EG, BD respectivamente.

El plano determinado por AD y CD corta los planos PQ y MN en GF, AC respectivamente.

EG es ∥ a BD,

y GF es ∥ a AC; N.° 453

$\therefore AE : EB = AG : GD$,

y $CF : FD = AG : GD$. N.° 273

$\therefore AE : EB = CF : FD$ (n.° 52, 7.°) L.C.D.D.

Este teorema es la generalización del del n.° 275. Puede enunciarse aun con mayor generalidad así: *Los segmentos determinados en dos rectas por un número cualquiera de planos paralelos son proporcionales.*

Estúdiese el caso en que las dos rectas se cortan entre los planos.

¿Por qué no se aplica aquí la demostración del teorema correspondiente de geometría plana (n.° 275)?

EJERCICIO 77

1. ¿Cuál es el lugar geométrico de las rectas que pasan por un punto dado y son paralelas a un plano dado?

2. ¿Cuál es el lugar de un punto que está en un plano dado y equidista de dos puntos exteriores al plano?

3. ¿Cuál es el lugar de un punto equidistante de tres puntos dados no situados en línea recta?

4. ¿Cuál es el lugar de un punto que equidista de dos planos paralelos dados y también de dos puntos dados?

5. ¿Cuál es el lugar de un punto tal de un plano que su distancia a una recta dada del plano es constante? ¿Cuál el de un punto cuya distancia a un plano dado es constante?

6. La recta AB encuentra tres planos paralelos en A, E, B; y la CD los encuentra en C, F, D. Si $AB = 6$, $EB = 8$, $CD = 12$, calcúlense CF y FD.

7. Si en el problema anterior se dan $AB = 8$, $CF = 5$, $CD = 9$, calcúlense AE, EB.

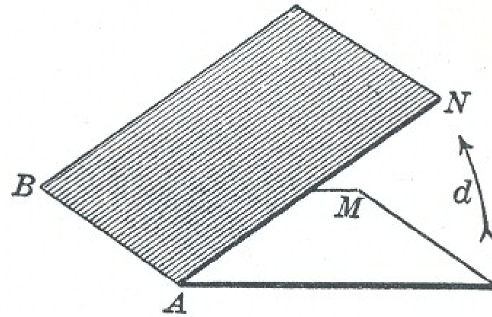
8. Trazar una perpendicular a un plano por un punto dado exterior al plano.

9. En un punto dado de un plano, levantar una perpendicular al plano.

10. Se demuestra en geometría plana que si tres o más paralelas interceptan segmentos iguales en una trasversal, interceptan segmentos iguales en cualquiera otra. Enúnciese y demuéstrese el teorema correspondiente de la geometría del espacio.

11. Se ha demostrado que la recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo plano es paralela al tercer lado. Enúnciese y demuéstrese un teorema semejante relativo a los planos que pasan por los puntos medios de dos lados de un triángulo.

463. Ángulo diedro. Llámase *diedro*, o *ángulo diedro*, la abertura o inclinación de dos planos que se cortan.



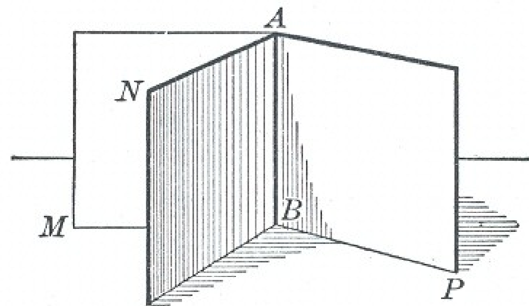
En esta figura los planos *AM* y *BN* son las *caras* del diedro que forman. Su intersección *AB* se llama *arista* del diedro.

Un diedro se nombra por letras puestas sobre la arista, o sobre la arista y las caras, o por medio de una letra escrita dentro del diedro. Así, el ángulo que aquí se representa puede leerse *AB*, o *M-AB-N*, o *d*.

464. Magnitud de un diedro. La magnitud de un diedro depende de la rotación necesaria para llevar una de las caras, haciéndola girar sobre la arista, a la posición de la otra.

Como queda dicho (n.º 22), cosa análoga se aplica a los ángulos planos. La diferencia consiste en que un ángulo plano es engendrado por la rotación de una recta sobre un punto — el vértice; y un diedro, por la rotación de un plano sobre una recta — la arista.

465. Diedros adyacentes. Dícese que dos ángulos diedros son *adyacentes* cuando tienen una misma arista y una cara común comprendida entre las otras dos.



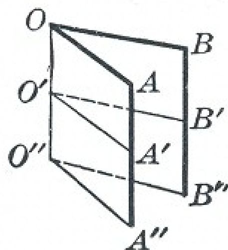
Por ejemplo, *M-AB-N* y *N-BA-P* son diedros adyacentes. (Véase lo dicho en el n.º 25.)

466. Diedro recto. Cuando dos planos se encuentran formando diedros adyacentes iguales, estos diedros se llaman *diedros rectos*.

Los términos *agudo*, *obtuso*, *entrante*, *complementario*, *suplementario*, aplicados a los diedros, tienen significados análogos a los definidos al tratar de los ángulos planos, mas su empleo no es frecuente con respecto a los diedros.

467. Planos perpendiculares. Dícese que dos planos que se cortan son *perpendiculares* entre sí cuando los diedros que forman son rectos.

468. Ángulo plano de un diedro. El ángulo formado por dos rectas trazadas por un mismo punto de la arista de un diedro, una en cada cara del diedro, y ambas perpendiculares a la arista, se llama *ángulo plano del diedro.*



El $\angle AOB$ es el ángulo plano del diedro OO'' si OA y OB son ⊥s a $O'O''$.

469. Corolario. *La magnitud del ángulo plano de un diedro es independiente de la posición del vértice.*

El alumno puede demostrar fácilmente la igualdad de los ángulos AOB, $A'O'B'$, $A''O''B''$, todos los cuales satisfacen las condiciones de la definición del n.º 468. (Véanse los n.os 95 y 461.)

470. Comparación de los diedros y los ángulos planos. Es fácil ver que los diedros tienen muchas propiedades semejantes a las de los ángulos planos, y que muchos teoremas aplicables a éstos son, con un ligero cambio de palabras, aplicables a aquéllos y se demuestran por análogos razonamientos. Las proposiciones que se dan a continuación servirán de ejemplos de esta correspondencia:

1.ª Dos planos que se cortan forman diedros adyacentes suplementarios.

2.ª Si la suma de dos diedros adyacentes es igual a dos diedros rectos, sus caras exteriores están en un mismo plano.

3.ª Dos diedros opuestos por la arista son iguales. (Por analogía con los ángulos opuestos por el vértice, ¿qué debe entenderse por *diedros opuestos por la arista*?)

4.ª Si un plano corta dos planos paralelos, los diedros correspondientes son iguales; los alternos-internos son iguales; y los externos o internos de un mismo lado del plano secante son suplementarios. (¿Qué debe entenderse por *plano secante* de otros?)

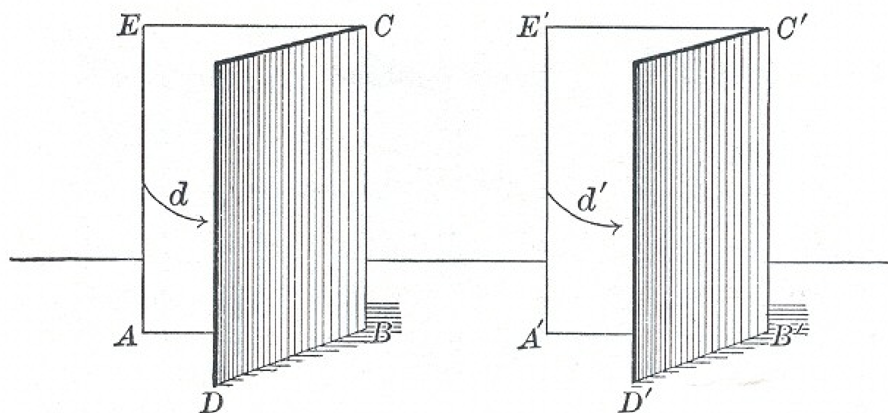
5.ª Si un plano corta otros dos formando con ellos diedros correspondientes o alternos iguales, y las aristas de estos diedros son paralelas, los dos planos son paralelos.

6.ª Si las caras de un diedro son repectivamente paralelas a las de otro, los diedros son o iguales o suplementarios.

7.ª Dos diedros cuyas caras son respectivamente perpendiculares y cuyas aristas son paralelas son o iguales o suplementarios.

Proposición XV. Teorema

471. *Si los ángulos planos de dos diedros son iguales, los dos diedros son iguales.*



Supóngase que los ángulos planos *ABD*, *A′B′D′* de los dos diedros *d* y *d′* son iguales.

Demostrar que   *diedro* d = *diedro* d′.

Demostración. Colóquese el diedro d' sobre el d, de manera que los dos ángulos planos $A'B'D'$ y ABD, que se suponen iguales, coincidan.

Ahora bien,

$B'C'$ es $\perp$ a $A'B'$ y $D'B'$;   N.° 468

$\therefore$ $B'C'$ es $\perp$ al plano $A'B'D'$.   N.° 431

$\therefore$ $B'C'$ será también $\perp$ al plano ABD en B.   N.° 53, 5.°

Síguese de aquí que

$B'C'$ tomará la dirección de BC.   N.° 436

Puesto que los planos $A'B'C'$ y ABC tienen comunes las rectas concurrentes AB y BC, por las cuales no puede pasar más de un plano, dichos planos coinciden.   N.° 425

Puede asímismo demostrarse que los planos $D'B'C'$ y DBC son en realidad uno.

Así pues, los dos diedros d y d' coinciden en todas sus partes y son por tanto iguales.   L. C. D. D.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA

472. *Dos diedros cualesquiera son entre sí como sus ángulos planos respectivos.*

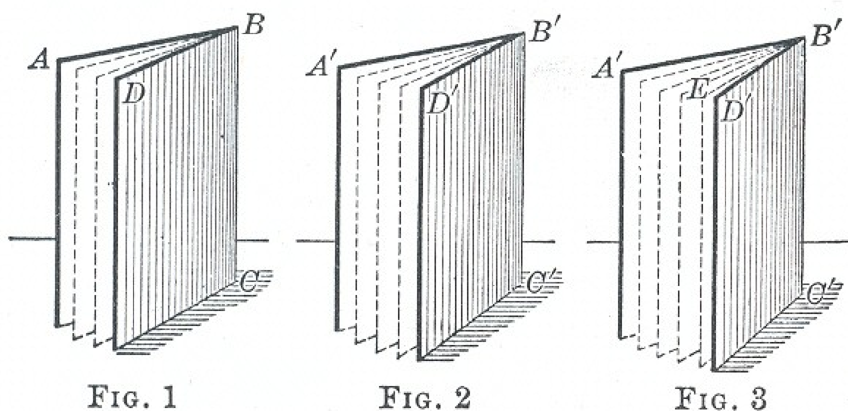


FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3

Sean BC, $B'C'$ dos diedros, y sean ABD, $A'B'D'$ sus ángulos planos respectivamente.

Demostrar que $\angle B'C' : \angle BC = \angle A'B'D' : \angle ABD$.

CASO 1.° *Cuando los ángulos planos son conmensurables.*

Demostración. Supóngase que los ángulos ABD y $A'B'D'$ (figs. 1 y 2) tienen una medida común, y que esta medida está contenida m veces en el ángulo ABD y n veces en el ángulo $A'B'D'$. Los valores numéricos de estos ángulos, en función de esa medida, son pues m y n respectivamente, y por tanto,

$$\angle A'B'D' : \angle ABD = n : m.$$

Trácense rectas que dividan estos ángulos en ángulos iguales a su común medida, y por ellas y las aristas trácense planos correspondientes.

Estos planos dividirán el ángulo BC en m partes iguales entre sí, y el $B'C'$ en n partes iguales entre sí y a las del BC (n.° 471). Luego

$$\angle B'C' : \angle BC = n : m,$$

y, combinando esta proporción con la anterior,

$$\angle B'C' : \angle BC = \angle A'B'D' : \angle ABD \text{ (n.° 52, 7.°).}$$ L. C. D. D.

Caso 2.° *Cuando los ángulos planos son inconmensurables.*

Demostración. Divídase el $\angle ABD$ en un número cualquiera de partes iguales, y tómense succesivamente en $A'B'D'$ (figs. 1 y 3) tantas de esas partes como se pueda.

Puesto que en este caso los ángulos planos son inconmensurables, esta última operación dejará un residuo $EB'D'$ menor que una de las partes.

Trácese un plano por $B'E$ y $B'C'$.

Puesto que los ángulos planos de los diedros $A\text{-}BC\text{-}D$ y $A'\text{-}B'C'\text{-}E$ son conmensurables,

$$A'\text{-}B'C'\text{-}E : A\text{-}BC\text{-}D = \angle A'B'E : \angle ABD. \qquad \text{Caso 1.°}$$

Aumentando el número de divisiones del ángulo ABD, se disminuye la magnitud de cada parte, y así el residuo $EB'D'$ puede hacerse menor que cualquier ángulo dado, por pequeño que sea.

Por tanto, el $\angle EB'D'$ tiende hacia cero a medida que se aumenta el número de partes, y al mismo tiempo el diedro $E\text{-}B'C'\text{-}D'$ tiende hacia cero. N.° 204

Luego el $\angle A'B'E$ tiende hacia el $A'B'D'$, y el $A'\text{-}B'C'\text{-}E$ hacia el $A'\text{-}B'C'\text{-}D'$.

$$\therefore \text{ la variable } \frac{\angle A'B'E}{\angle ABD} \text{ tiende hacia } \frac{\angle A'B'D'}{\angle ABD}$$

$$\text{y} \quad \text{la variable } \frac{\angle A'\text{-}B'C'\text{-}E}{\angle A\text{-}BC\text{-}D} \text{ tiende hacia } \frac{\angle A'\text{-}B'C'\text{-}D'}{\angle A\text{-}BC\text{-}D}.$$

$$\text{Pero} \quad \frac{\angle A'B'E}{\angle ABD} \text{ es siempre igual a } \frac{\angle A'\text{-}B'C'\text{-}E}{\angle A\text{-}BC\text{-}D}.$$

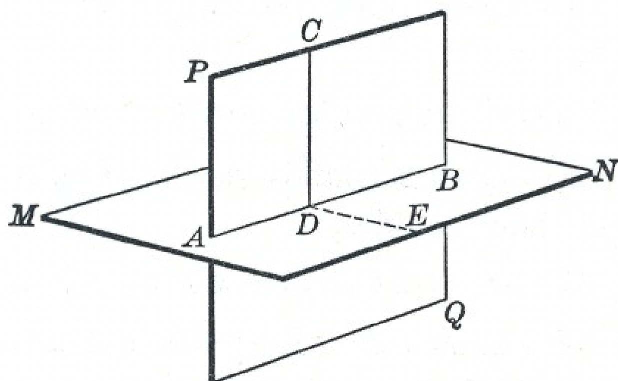
$$\therefore \frac{\angle A'\text{-}B'C'\text{-}D'}{\angle A\text{-}BC\text{-}D} = \frac{\angle A'B'D'}{\angle ABD} \text{ (n.° 207).} \qquad \text{L.C.D.D}$$

473. Corolario. *El ángulo plano de un diedro puede tomarse por medida del diedro.*

En la práctica, un diedro se expresa siempre por su ángulo plano Así un diedro de 40° es un diedro cuyo ángulo plano es de 40°.

PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA

474. *Si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta perpendicular a su intersección y contenida en uno de ellos es perpendicular al otro.*



Sean *MN* y *PQ* dos planos perpendiculares entre sí, y *CD* una recta trazada en *PQ* perpendicular a la intersección *AB* de los dos planos.

Demostrar que CD *es* $\perp$ *a* MN.

Demostración. En MN trácese $DE \perp$ a AB.

$\angle EDC = 1$ rt., N.° 473

$\angle CDA = 1$ rt. Por hipót.

$\therefore CD$ es $\perp$ a MN (n.° 431). L.C.D.D.

475. CoROLARIO 1.° *Si dos planos son perpendiculares entre sí, toda recta perpendicular a uno de ellos y que corta su intersección es una recta del otro.*

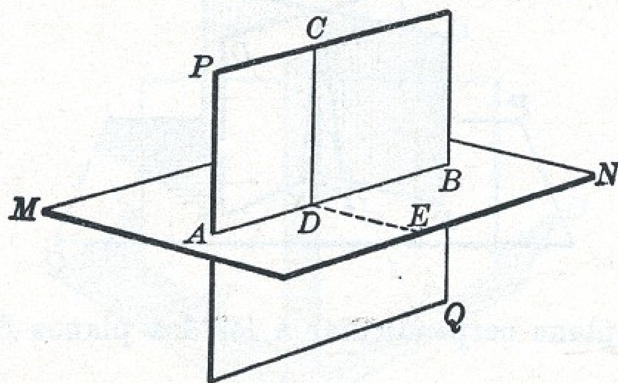
¿Será perpendicular al plano MN una recta CD trazada en PQ perpendicular a AB?

476. COROLARIO 2.° *Si dos planos son perpendiculares entre sí, una perpendicular trazada a uno de ellos por un punto cualquiera del otro estará contenida en ese otro.*

¿Será $\perp$ a MN una recta CD trazada de $C \perp$ a AB?

Proposición XVIII. Teorema

477. *Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pasa por ella también lo es.*



Sean *CD* una perpendicular al plano *MN* en *D*, y *PQ* un plano que contiene a *CD* y corta a *MN* en *AB*.

Demostrar que PQ *es* $\perp$ *a* MN.

Demostración. En el plano MN trácese DE perpendicular a la intersección AB.

Puesto que	CD es $\perp$ a MN,	Por hipót.
	CD es $\perp$ a AB;	N.° 430
	$\therefore \angle EDC$ es la medida del $\angle N\text{-}AB\text{-}P$.	N.° 473
	$\angle EDC = 1$ rt.	N.° 430
	$\therefore PQ$ es $\perp$ a MN (n.° 467).	L. C. D. D.

EJERCICIO 78

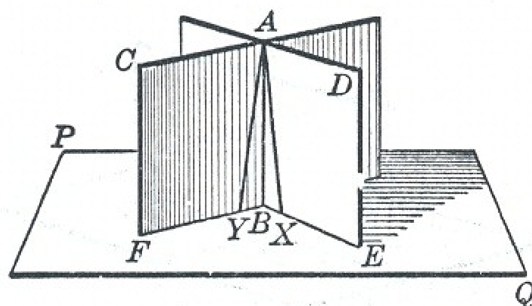
1. Todo plano perpendicular a la arista de un diedro es perpendicular a las caras.

2. Si dos rectas son perpendiculares entre sí, ¿ es perpendicular a una de ellas todo plano que contiene la otra ?

3. Si tres rectas concurrentes son perpendiculares entre sí, ¿lo son los planos que determinan ?

Proposición XIX. Teorema

478. *Si un plano es perpendicular a otros dos, lo es a su intersección.*



Sea PQ un plano perpendicular a los dos planos BC, BD, que se cortan en AB.

Demostrar que AB es $\perp$ a PQ.

Demostración. Sean BF y BE las intersecciones de PQ con BC y BD respectivamente.

Por un punto cualquiera A de AB trácense $AX \perp$ a BE, y $AY \perp$ a BF.

AX y AY son $\perp$s a PQ. N.º 474

Mas es imposible trazar dos perpendiculares al plano PQ por un punto exterior, N.º 437

o por un punto de PQ; N.º 436

$\therefore AX$ y AY coinciden.

Pero AX y AY no pueden coincidir a menos que ambas estén en los dos planos.

Como todos los puntos comunes a los dos planos están en AB, N.º 429

AX y AY coinciden con AB.

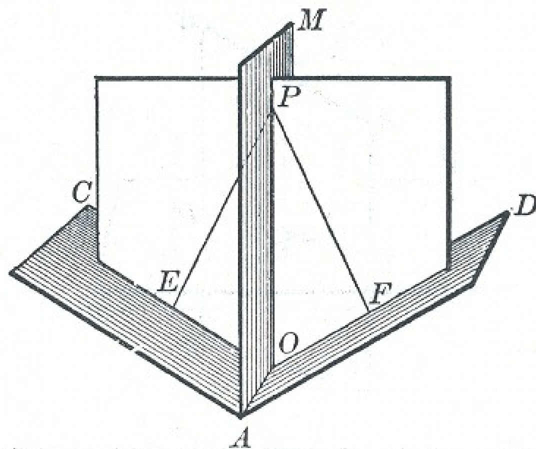
$\therefore AB$ es $\perp$ al plano PQ. L. C. D. D.

Obsérvese la dirección de la intersección de dos paredes de un cuarto con relación al suelo o al techo.

En la demostración anterior, ¿por qué no puede la intersección AB ser paralela al plano PQ?

PROPOSICIÓN XX. TEOREMA

479. *El lugar geométrico de los puntos equidistantes de las caras de un diedro es el plano bisector del diedro.*



Sea *AM* el plano bisector del diedro cuyas caras son *AD* y *AC*.

Demostrar que AM es el lugar geométrico de todos los puntos equidistantes de AD y AC.

Demostración. Sea EOF un plano ⊥ en O a AO, intersección de los planos AD y AC.

Puesto que AO es ⊥ a EOF,

los planos AD, AM y AC son ⊥s a EOF. No.° 477

Por un punto cualquiera P de la intersección de AM y EOF trácense PF ⊥ a OF, y PE ⊥ a OE.

PF es ⊥ a AD, y PE a AC. N.° 474

PF y PE son pues las distancias de P a AD y AC. N.° 438

Puesto que AO es ⊥ a OF, OP y OE, N.° 430

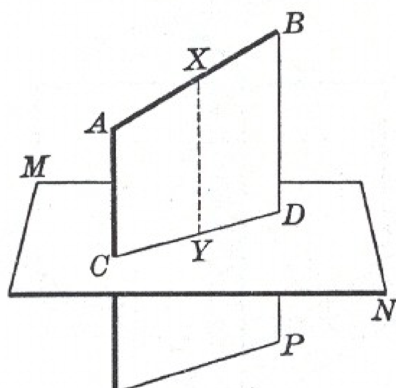
OP es la bisectriz del $\angle FOE$, N.° 473

y por tanto el lugar de los puntos equidistantes de OF y OE. N.° 152

Luego AM, que contiene todos los puntos P, es el lugar de los puntos equidistantes de AD y AC. L. C. D. D.

PROPOSICIÓN XXI. TEOREMA

480. *Por una recta que no es perpendicular a un plano puede hacerse pasar un plano perpendicular a aquél, y sólo uno.*



Sea AB una recta que no es perpendicular al plano MN.

Demostrar que por AB puede hacerse pasar un plano, y sólo uno, perpendicular a MN.

Demostración. De un punto cualquiera X de AB bájese XY perpendicular a MN,

y por AB y XY trácese un plano AP. N.º 425

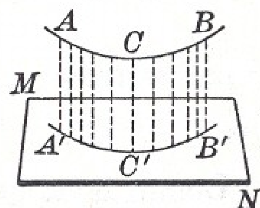
El plano AP es $\perp$ al MN. N.º 477

Además, si por AB pudieran pasar dos planos $\perp$s a MN, su intersección AB sería $\perp$ a MN. N.º 478

Esto es imposible, puesto que AB no es $\perp$ a MN. Por hipót.

Luego por AB puede hacerse pasar un plano, y sólo uno, perpendicular al plano MN. L. C. D. D.

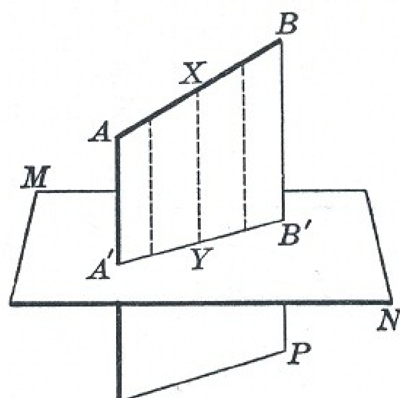
481. Proyección de un punto sobre un plano. Llámase *proyección de un punto* sobre un plano el pie de la perpendicular del punto al plano.



482. Proyección de una línea. Llámase *proyección de una línea* sobre un plano la línea formada por las proyecciones de los puntos de aquélla.

Proposición XXII. Teorema

483. *La proyección de una recta sobre un plano que no es perpendicular a la recta es una recta.*



Sea $A'B'$ la proyección de una recta AB sobre un plano MN que no es perpendicular a AB.

Demostrar que $A'B'$ *es una recta.*

Demostración. De un punto cualquiera X de AB trácese una perpendicular XY a MN,

y trácese un plano AP por XY y AB. N.° 426

AP es $\perp$ a MN, N.° 477

y contiene todas las $\perp$s trazadas de AB a MN. N.° 476

Luego $A'B'$ es la intersección de estos dos planos.

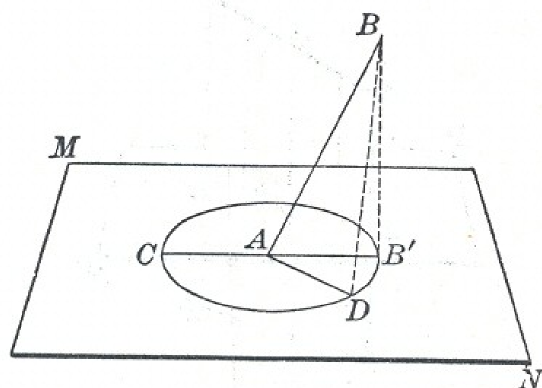
Luego $A'B'$ es una recta (n.° 429). L.C.D.D.

484. Corolario. *Si una recta es perpendicular a un plano, su proyección sobre ese plano es un punto.*

485. Ángulo entre una recta y un plano. Llámase *ángulo de una recta y un plano*, o *de una recta con un plano*, el formado por la recta con su proyección sobre el plano. Llámase también este ángulo, sobre todo en el lenguaje ordinario, *inclinación* de la recta al plano.

PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA

486. *El ángulo agudo que una recta forma con su proyección sobre un plano es menor que el que forma con cualquiera otra recta del plano.*



Sean AB una recta que encuentra en A al plano MN; AB' la proyección de AB sobre MN, y AD otra recta cualquiera del plano trazada por A.

Demostrar que $\angle B'AB < \angle DAB$.

Demostración. Hágase AD igual a la proyección AB', y luégo trácense BB' y BD.

En los $\triangle BAB'$ y BAD,

$AB = AB$, Ident.

$AB' = AD$, Por constr.

$BB' < BD$. N.° 438

$\therefore \angle B'AB < \angle DAB$ (n.° 116). L.C.D.D.

Si el $\angle B'AB$ es el menor que AB puede formar con una recta del plano, ¿qué se deduce en cuanto a BAC comparado con los ángulos que AB forma con otras rectas del plano? Enúnciese la respuesta en forma de teorema general.

¿Cómo puede interpretarse el teorema si AB es paralela al plano? ¿si es perpendicular al plano?

Si AD gira sobre el punto A de la posición AB' a la AC, ¿cómo varía el ángulo DAB?

EJERCICIO 79

1. ¿En qué caso es la proyección de un segmento de recta sobre un plano igual al segmento?

2. De un punto A, distante 10 cm. de un plano MN, se traza al plano una oblicua AC de 12,5 cm. Hállese el área del círculo descrito por C cuando la oblicua gira alrededor de la perpendicular bajada de A a MN.

3. De un punto A, distante 20 cm. de un plano MN, se baja a MN una perpendicular AB. Con centro B se describe en el plano una circunferencia de 15 cm. de radio. Por un punto C de ésta circunferencia se traza una tangente CD de 60 cm. Calcúlese la longitud de la recta AD.

4. Los ángulos formados con un plano por oblicuas iguales concurrentes son iguales.

5. Por un punto situado a 20 cm. de un plano se trazan al plano varias oblicuas de 25 cm. de longitud. Dígase lo que se sepa con respecto al lugar geométrico de los pies de todas estas oblicuas.

6. Dadas tres rectas concurrentes no situadas en un mismo plano, ¿cómo puede trazarse una recta que forme con ellas ángulos iguales?

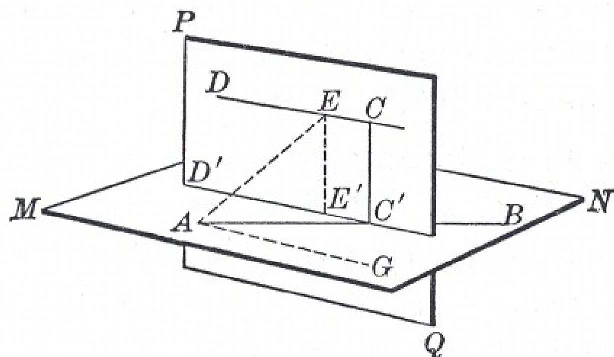
7. Por un punto cualquiera P se trazan las perpendiculares PX y PY a dos planos MN y AC que se cortan en AB. Por Y se traza YZ perpendicular a MN. Demuéstrese que XZ es perpendicular a AB.

8. Si la longitud de la sombra de un árbol situado en terreno horizontal es mayor que el alto del árbol, ¿menor que qué ángulo debe ser el formado por los rayos solares con el plano horizontal?

9. ¿Cómo se determina un punto situado a una distancia dada de un plano dado y equidistante de tres puntos dados del plano?

Proposición XXIV. Teorema

487. *Dos rectas no situadas en un mismo plano tienen una perpendicular común que las corta a ambas, y sólo una.*



Sean *AB* y *CD* dos rectas no situadas en un mismo plano.

Demostrar que AB y CD tienen una perpendicular común que las corta a ambas, y sólo una.

Demostración. 1.° Por un punto A de AB trácese $AG \parallel$ a DC.

El plano MN de AB y AG es $\parallel$ a DC. N.° 448

Por DC trácese el plano $PQ \perp$ a MN en $D'C'$. N.° 480

DC no puede encontrar a $D'C'$, puesto que es $\parallel$ a MN;

$\therefore DC$ es $\parallel$ a $D'C'$; N.° 93

$\therefore$ si AB es $\parallel$ a $D'C'$, lo es a DC. N.° 446

Pero AB no es $\parallel$ a DC, pues no están en un mismo plano;

$\therefore AB$ encuentra $D'C'$ en un punto C'.

Trácese $C'C \perp$ a MN.

$C'C$ es $\perp$ a AB y a $D'C'$. N.° 430

Puesto que $C'C$ es $\perp$ a $D'C'$ y está en PQ, N.° 475

$C'C$ es $\perp$ a DC. N.° 97

Luego las dos rectas tienen una perpendicular comun.
Falta demostrar que no pueden tener más de una.

2.° Supóngase que tengan otra perpendicular común EA que las corte a ambas.

EA debe ser $\perp$ a AG, N.° 97

y por tanto al plano MN. N.° 431

Trácese $EE' \perp$ a $D'C'$.

EE' debe ser $\perp$ a MN, N.° 474

lo cual es imposible, si EA también es $\perp$ a MN. N.° 437

Luego la suposición de que puede existir más de una perpendicular conduce a un absurdo.

Luego, finalmente, las dos rectas tienen una perpendicular común, y sólo una. L.C.D.D.

488. Corolario. *La perpendicular común que corta dos rectas es la menor distancia entre ellas.*

¿Qué puede afirmarse de CC' comparada con EE'?

¿Qué puede demostrarse en cuanto a EE' comparada con EA?

EJERCICIO 80

1. Las proyecciones de paralelas sobre un plano son paralelas.

2. Si dos planos son perpendiculares entre sí, y una recta es perpendicular a uno de ellos, ¿qué propiedad tiene con respecto al otro?

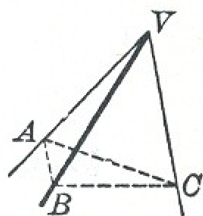
3. Si tres rectas concurrentes en P encuentran otra que no pasa por P, las cuatro están en un mismo plano.

4. Siete rectas, de las cuales ningunas tres están en un mismo plano, se encuentran en un punto. ¿Cuántos planos determinan?

5. Una vasija cúbica de 10 cm. de profundidad contiene agua hasta 7 cm. del fondo. Si se coloca una varilla de 12 cm. de modo que uno de sus extremos se apoye en el fondo y el otro en el borde superior, ¿cuánto de ella se mojará? Hágase un croquis de la vasija con la varilla.

489. Ángulo poliedro. Llámase *ángulo poliedro* la abertura de tres o más planos que se encuentran en un punto.

El punto común V se llama *vértice* del ángulo; las intersecciones, como VA, VB, de los planos se llaman *aristas*. Los ángulos formados por los planos se llaman *diedros* del ángulo, y los formados por las aristas, *caras* del ángulo. Se observará que el término *caras* se aplica también a los planos de un diedro.



Las caras y los diedros de un ángulo poliedro son las *partes* del ángulo.

490. Magnitud de un ángulo poliedro. La magnitud de un ángulo poliedro depende de las posiciones relativas de los planos que lo forman, y no de la extensión de dichos planos, que se suponen ilimitados.

491. Ángulos poliedros cóncavos y convexos. Un ángulo poliedro es *cóncavo* o *convexo* según que la sección determinada por un plano que corta fuera del vértice todas las aristas sea un polígono cóncavo o convexo.

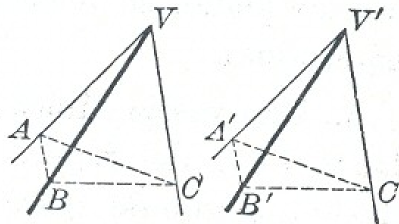
Aquí se tratará sólo de los convexos.

492. Clasificación de los ángulos poliedros. Llámase *ángulo triedro*, o *triedro* simplemente, el ángulo poliedro formado por tres planos.

Los ángulos poliedros de cuatro, cinco, etc. planos se llaman *ángulos tetraedros*, *pentaedros*, etc.; pero estos nombres rara vez se usan.

Un ángulo poliedro se nombra por medio de una letra escrita en el vértice, o por medio de ésta y otras escritas sobre las aristas. El triedro de la figura anterior puede llamarse ángulo V o ángulo $V\text{-}ABC$.

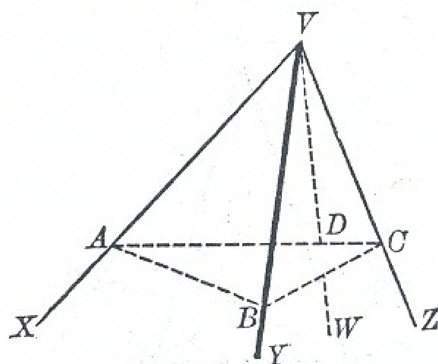
493. Ángulos poliedros iguales. Se dice que dos ángulos poliedros son *iguales* cuando consisten de partes iguales semejantemente dispuestas.



Los triedros $V\text{-}ABC$, $V'\text{-}A'B'C'$ representados en esta figura son iguales. Dos ángulos poliedros iguales son evidentemente congruentes.

PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA

494. *La suma de dos caras cualesquiera de un triedro es mayor que la otra cara.*



Sea *V-XYZ* un triedro cuya cara mayor es *XVZ*.

Demostrar que $\angle XVY + \angle YVZ > \angle XVZ$.

Demostración. En el $\angle XVZ$ trácese VW de tal suerte que el ángulo XVW sea igual al XVY.

Por un punto cualquiera D de VW trácese la recta ADC en el plano XVZ.

Hágase $VB = VD$.

Trácese un plano por AC y B.

Puesto que $AV = AV$, $VD = VB$, y $\angle AVD = \angle AVB$,

los $\triangle AVD$, AVB son iguales (n.° 68), y $AD = AB$. N.° 67

En el $\triangle ABC$, $AB + BC > AD + DC$. N.° 112

Puesto que $AB = AD$, síguese que $BC > DC$. N.° 52, 4.°

En los $\triangle BVC$ y DVC,

$$VC = VC,\ VB = VD,\ BC > DC;$$

$$\therefore \angle BVC > \angle DVC; \qquad \text{N.° 116}$$

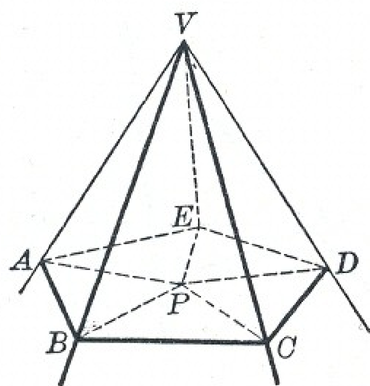
$$\therefore \angle AVB + \angle BVC > \angle AVD + \angle DVC, \qquad \text{N.° 52, 4.°}$$

esto es, $\angle AVB + \angle BVC > \angle AVC$, N.° 52, 8.°

o sea, $\angle XVY + \angle YVZ > \angle XVZ$. L. C. D. D.

PROPOSICIÓN XXVI. TEOREMA

495. *La suma de las caras de un ángulo poliedro es menor que cuatro rectos.*



Sean V un ángulo poliedro, y $ABCDE$ un polígono determinado por un plano que corta las aristas.

Demostrar que $\angle AVB + \angle BVC + \ldots < 4$ *rt.*

Demostración. Por un punto P interior al polígono trácense rectas a los vértices. Fórmanse así varios triángulos que tienen el vértice común P.

El número de estos triángulos es evidentemente igual al de los que tienen el vértice común V.

Por consiguiente, la suma de los ∡ de los △ que tienen el vértice común P es igual a la suma de los ∡ de los △ que tienen el vértice común V.

En los triedros formados en A, B, $C \ldots$,

$$\angle VBA + \angle CBV > \angle CBA \ldots$$ N.° 494

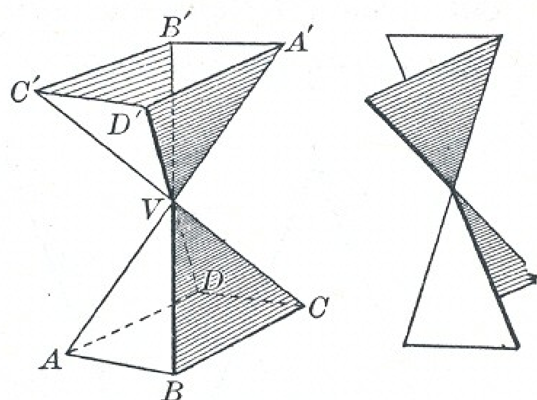
Luego la suma de los ángulos en $A, B \ldots$ de los △ de vértice V es mayor que la de los △ de vértice P. N.° 52, 5°

Luego la suma de los ángulos en V es menor que la de los ángulos en P. N.° 52, 6.°

Como la suma de los ∡ en P es 4 rt., N.° 41

la suma de los ∡ en V es menor que 4 rt. L. C. D. D.

496. Ángulos poliedros simétricos. Si los planos de un ángulo poliedro V-$ABCD$ se prolongan por el vértice V, se forma otro ángulo poliedro V-$A'B'C'D'$, que es *simétrico* del V-$ABCD$.



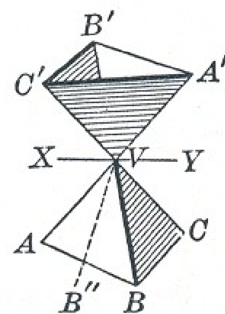
Las caras AVB, BVC ... son iguales respectivamente a las $A'VB'$, $B'VC'$... (n.º 60).

Los diedros VA, VB ... son iguales respectivamente a los VA', VB'... (n.º 470). (En la segunda figura se representan dos de estos diedros.)

Miradas desde V, las aristas de V-$ABCD$ están dispuestas de izquierda a derecha en el orden VA, VB, VC..., mientras que las de V-$A'B'C'D'$ están dispuestas de derecha a izquierda en el orden VA', VB', VC'...; es decir, en orden inverso del de las aristas de V-$ABCD$. Cosa análoga se aplica a cualquier otro par de ángulos poliedros simétricos. Así pues,

Dos ángulos poliedros simétricos tienen todas sus partes respectivamente iguales pero dispuestas en orden inverso.

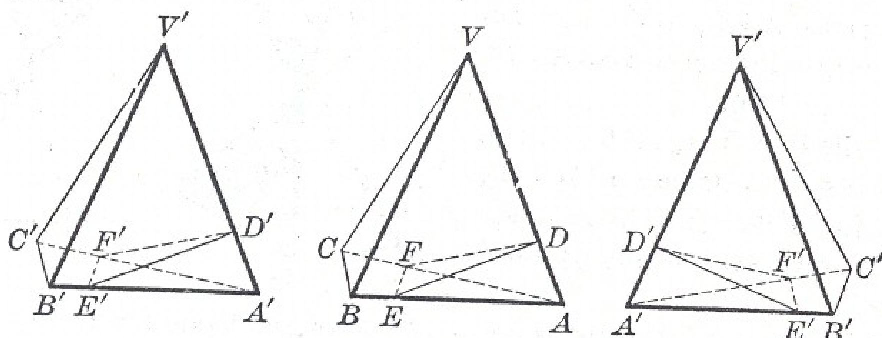
497. Dos ángulos poliedros simétricos no son congruentes. Por regla general, dos ángulos poliedros simétricos no son congruentes o superponibles. Si por ejemplo el triedro V-$A'B'C'$ se hace girar en 180° sobre el eje XY, bisectriz de CVA', VA' coincidirá con VC, VC' con VA, y el plano $A'VC'$ con el AVC; pero como el diedro VA, y por tanto el VA' no es necesariamente igual al VC, el plano $A'VB'$ no coincidirá necesariamente con el plano VBC; y, por razón análoga, el plano $C'VB'$ no coincidirá necesariamente con el AVB. La arista VB' puede pues tomar alguna posición, como VB'', distinta de VB, de donde se deduce que los dos triedros no son necesariamente superponibles. El mismo razonamiento se aplica a otros ángulos poliedros simétricos.



Cosa análoga se ve en un par de guantes. Todas las partes del uno son iguales a las correspondientes del otro, pero el guante derecho no puede ponerse en la mano izquierda.

Proposición XXVII. Teorema

498. *Dos triedros son iguales o simétricos si tienen las caras respectivamente iguales.*



Sean **V** y **V'** dos triedros en que las caras **BVA**, **CVA** y **CVB** son respectivamente iguales a las **$B'V'A'$**, **$C'V'A'$** y **$C'V'B'$**.

Demostrar que V y V' son iguales o simétricos.

Demostración. Tómense en las aristas los segmentos iguales VA, VB, VC, $V'A'$, $V'B'$, $V'C'$

Trácense AB, BC, CA,

$A'B'$, $B'C'$, $C'A'$.

Los △ isósceles BAV, CAV, CBV son respectivamente iguales a los $B'A'V'$, $C'A'V'$, $C'B'V'$; N.° 68

$\therefore AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$; N.° 67

$\therefore$ los △ BAC, $B'A'C'$ son iguales. N.° 80

Por un punto cualquiera D de la arista VA trácense DE en el plano AVB, y DF en el plano AVC, ambas perpendiculares a la arista VA.

Estas dos perpendiculares encuentran AB y AC respectivamente en puntos E y F, puesto que los ángulos VAB y VAC, cada uno de los cuales es adyacente a la base de un triángulo isósceles, son agudos.

Trácese EF.

En $A'V'$ tómese $A'D' = AD$.

Trácense $D'E'$ en el plano $A'V'B'$,

y $D'F'$ en el $A'V'C'$,

ambas perpendiculares a la arista $V'A'$.

Trácese $E'F'$.

Puesto que $AD = A'D'$, y $\angle DAE = \angle D'A'E'$, N.° 67

los $\triangle$ rectángulos ADE y $A'D'E'$ son iguales; N.° 72

$\therefore AE = A'E'$, y $DE = D'E'$. N.° 67

Asímismo, $AF = A'F'$, y $DF = D'F'$.

Puesto que los $\triangle BAC$ y $B'A'C'$ son iguales,

$\angle CAB = \angle C'A'B'$; N.° 67

$\therefore$ los $\triangle AFE$ y $A'F'E'$ son iguales; N.° 68

$\therefore EF = E'F'$; N.° 67

$\therefore$ los $\triangle EDF$ y $E'D'F'$ son iguales; N.° 80

$\therefore \angle FDE = F'D'E'$; N.° 67

$\therefore$ diedro VA = diedro $V'A'$. N.° 471

(*En este caso, los ángulos planos FDE, F'D'E' son los ángulos planos de los dos diedros respectivamente.*)

Puede demostrarse análogamente que los diedros VB, VC son respectivamente iguales a los $V'B'$, $V'C'$.

Luego los triedros V, V' son o iguales, N.° 493

o simétricos (n.° 496). L.C.D.D.

Esta demostración se aplica a los dos triedros marcados V'-$A'B'C'$, que son simétricos entre sí. El triedro de la izquierda es igual al V; el de la derecha es simétrico con V.

499. Corolario. *Si las tres caras de un triedro son respectivamente iguales a las de otro, los diedros del primero son respectivamente iguales a los del segundo.*

En efecto, sea que los triedros sean iguales o simétricos, sus diedros son necesariamente iguales (n.os 493, 496).

EJERCICIO 81

1. Hállese el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de dos rectas dadas que se cortan.

2. Hállese un punto equidistante de cuatro puntos que no se hallan en un mismo plano.

3. Dos diedros que tienen las aristas paralelas y las caras respectivamente perpendiculares son iguales o suplementarios.

4. Las proyecciones de segmentos de recta iguales y paralelos sobre un plano son iguales y paralelas.

5. Demuéstrese que dos triedros son iguales si dos diedros y la cara comprendida del uno son iguales respectivamente a las partes correspondientes del otro y están semejantemente dispuestos.

6. Demuéstrese que dos triedros son iguales si dos caras y el diedro comprendido del uno son respectivamente iguales a las partes correspondientes del otro y están semejantemente dispuestos.

7. Si la cara AVB del triedro $V\text{-}ABC$ se bisecta por la recta VD, el ángulo CVD es menor, igual o mayor que la semisuma de los ángulos AVC y BVC, según que $\angle CVD$ sea menor, igual o mayor que 90°.

8. Si dos caras de un triedro son iguales, los diedros opuestos a ellas también lo son.

9. Todo triedro que tiene dos caras iguales puede superponerse a su simétrico.

10. ¿Cuál es el lugar de los puntos equidistantes de las aristas de un triedro?

11. ¿Cuál es el lugar de los puntos equidistantes de los planos de un triedro?

12. Los planos bisectores de los diedros de un triedro se encuentran en una recta.

EJERCICIO 82

Problemas de cálculo

1. Por un punto P, distante 4 cm. de un plano, se traza al plano una recta PX de 5 cm. ¿Cuál es el lugar de los puntos X? Calcúlese la longitud del lugar.

2. Por un punto P que dista 5 cm. de un plano se traza al plano una oblicua PX de 12 cm. ¿Cuál es el área limitada por el lugar geométrico de los puntos X?

3. En un plano MN se traza un triángulo isósceles ABC cuya base AB es de 6 cm. y cuyo perímetro es de 20. Si el triángulo gira alrededor de la base, ¿cuál es la mayor distancia de MN a que C puede llegar?

4. La distancia entre dos puntos A y B es de 4 m. Un punto P se mueve de tal modo que su distancia a cada uno de aquéllos es siempre de 5 m. ¿Cuál es la longitud del lugar de P?

5. Un plano RS corta dos planos paralelos MN y PQ, formando con uno de ellos un diedro de $27° 15' 30''$. Calcúlense los otros diedros.

6. Tres planos paralelos cortan dos rectas. Los segmentos interceptados en la una son de 3 y 5,5 m.; y los correspondientes interceptados en la otra son de 7,75 y x m. Calcúlese x.

7. Un punto dista 8 m. de cada uno de dos planos perpendiculares. ¿Cuál es su distancia a la arista del diedro formado por ellos?

8. Una recta cuya longitud se expresa por $10\sqrt{2}$ forma un ángulo de 45° con un plano. ¿Cuál es la longitud de su proyección sobre el plano?

9. De un punto P se traza a un plano MN una perpendicular PP', que mide 9 cm. Por P se traza PQ, que encuentra al plano en Q y forma con PP' un ángulo $P'PQ$ de 30°. Calcúlese la proyección de la recta PQ sobre el plano MN.

EJERCICIO 83

Cuestionario de repaso

1. ¿Qué elementos determinan una recta? ¿Qué elementos determinan un plano?

2. ¿Por medio de qué medidas de distancias puede averiguarse si una recta es perpendicular: *a*) a una recta; *b*) a un plano?

3. ¿Cuántos planos perpendiculares a un plano dado pueden trazarse por una recta dada? Explíquense los casos posibles.

4. ¿Cuántas paralelas a una recta dada pueden trazarse por un punto dado? ¿a un plano dado? ¿Cuántos planos paralelos a una recta dada, y cuántos paralelos a un plano dado, pueden trazarse por un punto dado?

5. ¿Cuál es el lugar de los puntos equidistantes de dos puntos dados: *a*) en una recta; *b*) en un plano; *c*) en el espacio?

6. En un plano, ¿cuál es el lugar de los puntos equidistantes de dos rectas que se cortan? ¿Cuál es la proposición correspondiente en la geometría del espacio?

7. ¿Qué relación existe en el plano entre dos perpendiculares a una misma recta? Enúnciense dos proposiciones semejantes de la geometría del espacio. ¿Es cierto que dos planos perpendiculares a uno tercero deben ser paralelos?

8. ¿Qué se sabe con respecto a una recta que es perpendicular a una de dos paralelas? Enúnciense proposiciones correspondientes de la geometría del espacio. Si un plano es perpendicular a una recta, ¿debe serlo a toda recta paralela a ésta?

9. Si una recta es perpendicular a un plano, ¿qué propiedad tiene todo plano que contiene esa recta? ¿Obtiénese una proposición verdadera si en la anterior se sustituyen "paralela" y "paralelo" a "perpendicular"?

LIBRO VII

POLIEDROS, CILINDROS Y CONOS

500. Poliedro. *Poliedro* es un sólido limitado por planos.

Las figuras de esta página y la siguiente representan poliedros.

Los planos que limitan un poliedro se llaman *caras*; sus intersecciones, *aristas*; y las intersecciones de las aristas, *vértices* del poliedro.

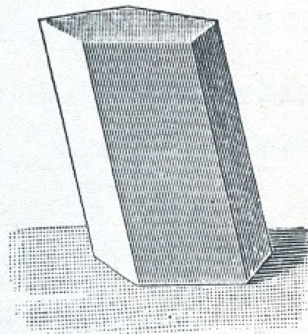
Toda recta que une dos vértices no situados en una misma cara se llama *diagonal* del poliedro.

501. Sección de un poliedro. Llámase *sección* de un poliedro la intersección de sus caras con un plano que las corta.

502. Poliedro convexo. Llámase *poliedro convexo* aquel en que todas las secciones posibles son polígonos convexos.

En esta obra no se trata de otros poliedros que los convexos.

503. Prisma. Llámase *prisma* un poliedro dos de cuyas caras son polígonos iguales situados en planos paralelos, y cuyas otras caras son paralelogramos.



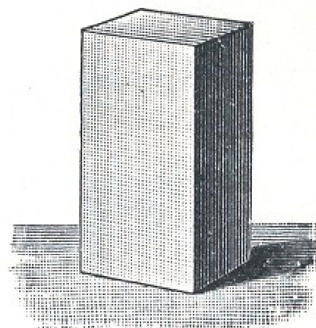
Los dos polígonos paralelos se llaman *bases* del prisma; los paralelogramos se llaman *caras laterales*; y las intersecciones de las caras laterales, *aristas laterales*. Con respecto a los prismas, el término *cara* se aplica exclusivamente a las laterales.

La suma de las áreas de las caras se llama *área lateral* del prisma.

Las aristas laterales de un prisma son iguales (n.° 125).

504. Altura de un prisma. Llámase *altura* de un prisma la longitud de la perpendicular común a los planos de las bases comprendida entre esos planos; o sea, la distancia entre los planos de las bases.

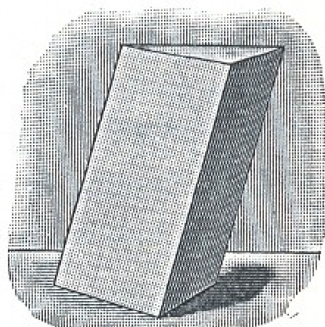
505. Prisma recto. Llámase *prisma recto* aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.


Prisma recto

Las aristas laterales de un prisma recto son iguales a la altura (n.º 455).

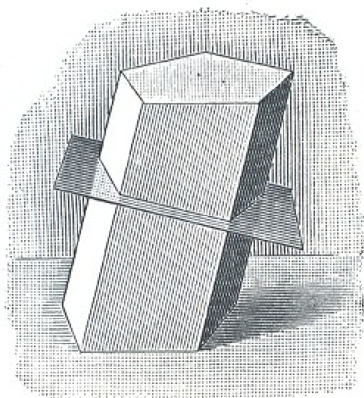
506. Prisma oblicuo. Llámase *prisma oblicuo* aquel cuyas aristas laterales son oblicuas a las bases.

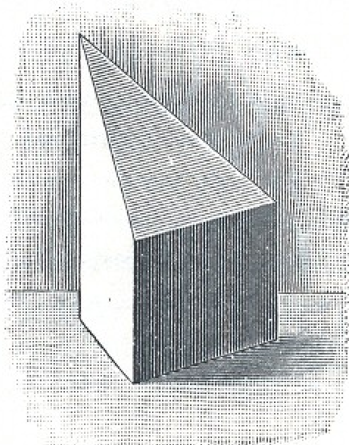
507. Clasificación de los prismas según las bases. Dícese que un prisma es *triangular*, *cuadrangular*, *pentagonal*, etc. según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, un pentágono, etc.


Prisma triangular oblicuo

508. Sección recta. Llámase *sección recta* de un prisma la sección determinada por un plano que corta todas las aristas y es perpendicular a ellas.

En los prismas oblicuos es a veces necesario prolongar algunas de las aristas para obtener una sección recta.

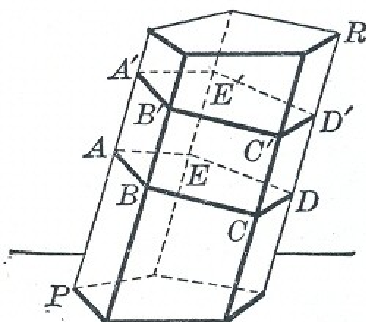

Sección recta de un prisma


Prisma truncado

509. Prisma truncado. Llámase *prisma truncado* la parte de un prisma comprendida entre una de las bases y un plano oblicuo a las bases.

Proposición I. Teorema

510. *Las secciones de un prisma determinadas por planos paralelos son polígonos iguales.*



Sean PR un prisma, y AD, $A'D'$ dos secciones paralelas.

Demostrar que AD *y* $A'D'$ *son iguales.*

Demostración. AB es ∥ a $A'B'$, BC a $B'C'$, etc.; N.° 453

$\therefore AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$, N.° 127

y así de los otros lados;

y también, en cuanto a los ángulos,

$\angle CBA = \angle C'B'A'$, $\angle DCB = \angle D'C'B'$, N.° 461

y así de los otros ángulos.

$\therefore AD$ es igual a $A'D'$ (n.° 142). L.C.D.D.

511. Corolario. *Toda sección de un prisma paralela a las bases es igual a las bases, y todas las secciones rectas son iguales entre sí.*

¿Aplícase la demostración anterior al caso en que los planos de sección son paralelos a las bases?

¿Por qué son iguales entre sí todas las secciones rectas.

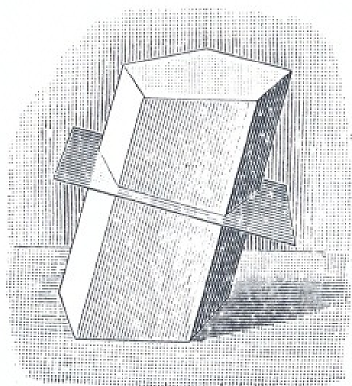
¿A qué es igual toda sección recta de un prisma recto?

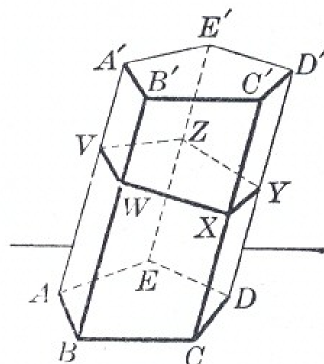
¿Cuántos sólidos se obtienen cortando un prisma por dos planos paralelos entre sí y oblicuos a las bases? ¿Cómo se llaman estos sólidos?

Casi todos los prismas que se emplean en la práctica, como pedestales, baldosas, ladrillos, son rectos, y en el dibujo se representan de ordinario por una sección recta. La forma más común es la rectangular.

Proposición II. Teorema

512. *El área lateral de un prisma es igual al producto de la arista lateral por el perímetro de la sección recta.*





Sean $VWXYZ$ la sección recta de un prisma AD', L el área lateral, a la arista lateral, y p el perímetro de la sección recta.

Demostrar que $L = ap$.

Demostración. $AA' = BB' = CC'$, etc., $= a$; N.° 503

VW es $\perp$ a BB', WX a CC', XY a DD'... N.° 508

área del $\square\, AB' = BB' \times VW = a \times VW$, N.° 322

área del $\square\, BC' = CC' \times WX = a \times WX$,

área del $\square\, CD' = DD' \times XY = a \times XY$...

y, como L es la suma de estos ⧄, N.° 503

$L = a(VW + WX + XY + YZ + ZV)$, N.° 52, 1.°

o, puesto que $VW + WX + XY + YZ + ZV = p$, N.° 52, 10.°

$L = ap$ (n.° 52, 8.°). L.C.D.D.

513. Corolario. *El área lateral de un prisma recto es igual al producto de la altura del prisma por el perímetro de la base.*

Esto se verá más claramente imaginando el prisma colocado con una de sus caras laterales sobre una mesa, desdoblado luégo por las aristas como si fuera una caja y puesto todo de plano sobre la mesa.

EJERCICIO 84

Hállense las áreas laterales de los prismas rectos en que la altura h *y el perímetro* p *tienen los valores siguientes:*

1. $h = 18$ cm., $p = 29$ cm.
2. $h = 22$ cm., $p = 37$ cm.
3. $h = 4{,}25$ m., $p = 6{,}75$ m.
4. $h = 1\frac{7}{12}$ pies, $p = 2\frac{3}{4}$ pies.
5. $h = 3{,}67$ m., $p = 5{,}62$ m.
6. $h = 125$ mm., $p = 275$ mm.

Hállense las áreas laterales de los prismas en que las aristas laterales y los perímetros de las secciones rectas son:

7. $a = 17$ cm., $p = 27$ cm.
8. $a = 23$ cm., $p = 35$ cm.
9. $a = 2{,}75$ m., $p = 4{,}875$ m.
10. $a = 1{,}25$ m., $p = 2{,}25$ m.
11. $a = 2\frac{7}{12}$ pies, $p = 3\frac{3}{4}$ pies.
12. $a = 6{,}3$ m., $p = 8{,}8$ m.

Hállense las aristas laterales de los prismas en que L y p *tienen los siguientes valores:*

13. $L = 187$ cm.², $p = 11$ cm.
14. $L = 357$ mm.², $p = 21$ mm.
15. $L = 169$ cm.², $p = 13$ cm.

16. Quieren dorarse las caras laterales de una barra de 1,5 m. de largo. La sección recta es un cuadrado de 15 cm.² ¿Cuántos centímetros cuadrados hay que dorar?

17. Hállese el área lateral de un prisma recto de 2,125 m. de largo cuya sección recta es un triángulo equilátero de $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ m de altura.

18. Hállese el área total de un prisma recto cuyas bases son cuadrados de 5,29 cm.² y cuyo largo es el doble del ancho.

19. En un prisma recto, $a = 32$ cm., y la base es un triángulo rectángulo en que la hipotenusa es de 1,06 m. y uno de los catetos es de 0,848 m. Hállese el área total.

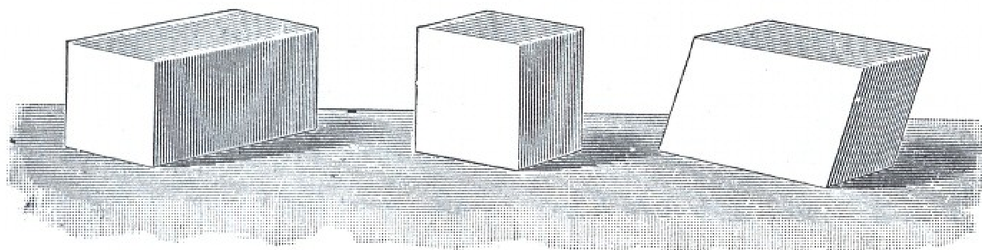
20. La sección de un prisma determinada por un plano paralelo a las aristas es un paralelogramo.

514. Paralelepípedo. Llámase *paralelepípedo* todo prisma en que las bases son paralelogramos.

515. Paralelepípedo recto. Llámase *paralelepípedo recto* aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases.

516. Paralelepípedo rectángulo. Llámase *paralelepípedo rectángulo* todo paralelepípedo recto cuyas bases son rectángulos.

En este caso, las cuatro caras son también rectángulos (n.ºs 430, 453).



Paralelepípedo rectángulo Cubo Paralelepípedo oblicuo

517. Cubo. Llámase *cubo* un paralelepípedo cuyas caras y bases son cuadrados.

Defínese también el cubo diciendo que es un exaedro (sólido de seis caras) cuyas seis caras son cuadrados.

518. Unidad de volumen. La *unidad de volumen* es el espacio ocupado por un cubo cuya arista es igual a la unidad de longitud.

Si, por ejemplo, las dimensiones de un cuarto se expresan en metros, se toma por unidad de volumen el *metro cúbico*, que es el espacio ocupado por un cubo cuya arista es de 1 metro.

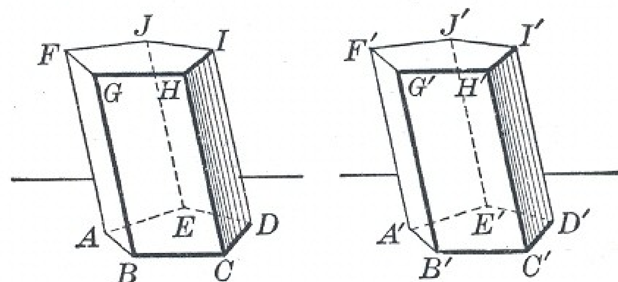
519. Volumen. Llámase *volumen* de un sólido el número de unidades de volumen que contiene.

520. Sólidos equivalentes. Llámanse sólidos *equivalentes* los que tienen un mismo volumen.

521. Sólidos iguales o congruentes. Dícese que dos sólidos son *iguales* o *congruentes* cuando todas las partes del uno son respectivamente iguales a las del otro y están semejantemente dispuestas.

PROPOSICIÓN III. TEOREMA

522. *Dos prismas son iguales cuando una base y dos caras contiguas del uno son respectivamente iguales a una base y dos caras contiguas del otro y están semejantemente dispuestas.*



Sean AI, $A'I'$ dos prismas en que la base AD y las caras AG, AJ son respectivamente iguales a $A'D'$, $A'G'$, $A'J'$ y están semejantemente dispuestas.

Demostrar que AI *es igual a* $A'I'$.

Demostración. Las caras BAE, BAF, EAF del triedro A son iguales a las correspondientes del A'. Luego

triedro $A =$ triedro A'. N.° 498

Colocando A sobre A', AD coincidirá con $A'D'$, AG con $A'G'$, AJ con $A'J'$, C con C', y D con D'.

Las aristas laterales son paralelas. N.° 446

Luego CH tomará la dirección de $C'H'$, y DI la de $D'I'$. N.° 94

Puesto que F, G, J coinciden respectivamente con F', G', J', los planos de las bases superiores coincidirán. N.° 427

Luego H coincidirá con H', e I con I'.

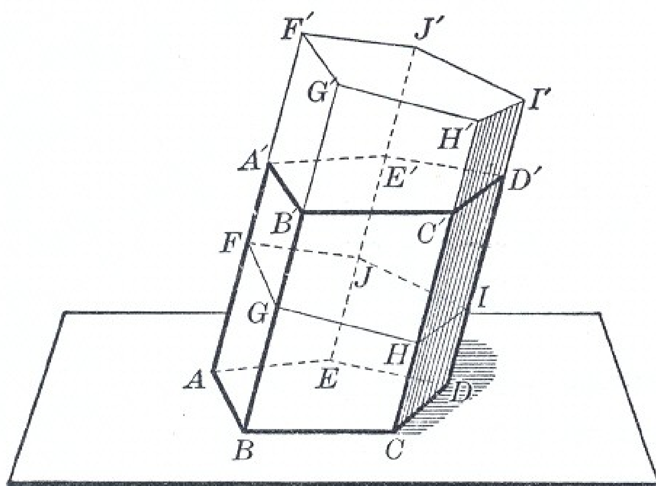
Luego los prismas son congruentes y por tanto iguales. L. C. D. D.

523. COROLARIO 1.° *Dos prismas truncados son iguales si llenan las condiciones del teorema anterior.*

524. COROLARIO 2.° *Dos prismas rectos de iguales bases e igual altura son iguales.*

Proposición IV. Teorema

525. *Todo prisma oblicuo es equivalente a uno recto cuya base es la sección recta del oblicuo y cuya altura es igual a la arista lateral del oblicuo.*



Sean FI la sección recta de un prisma oblicuo AD', y FI' un prisma recto cuyas aristas laterales son iguales a las de AD'.

Demostrar que AD' es equivalente a FI'.

Demostración. Si de las aristas laterales de AD' y FI' se restan las de FD', que son comunes a ambos, los residuos AF y $A'F'$, BG y $B'G'$, etc. serán iguales. N.° 52, 1.°

Las bases FI, $F'I'$ son iguales. N.° 511

Colóquese AI sobre $A'I'$ de suerte que FI coincida con $F'I'$.

FA, GB ... coincidirán con $F'A'$, $G'B'$ ... N.° 436

Luego las caras GA y $G'A'$, HB y $H'B'$ coincidirán.

Como las bases FI, $F'I'$ coinciden, los prismas truncados AI y $A'I'$ son iguales. N.° 523

Luego, en volumen,

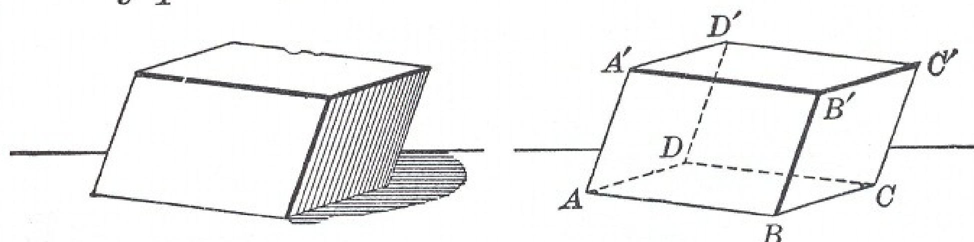
$$AI + FD' = A'I' + FD'. \qquad \text{N.° 52, 1.°}$$

Ahora bien, $AI + FD' = AD'$, y $A'I' + FD' = FI'$. N.° 52, 10.°

$\therefore AD'$ es equivalente a FI' (n.° 52, 8.°). L.C.D.D.

PROPOSICIÓN V. TEOREMA

526. *Las caras opuestas de un paralelepípedo son iguales y paralelas.*



Sea $ABCD\text{-}A'B'C'D'$ un paralelepípedo cualquiera.

Demostrar que las caras opuestas AB' y DC' son iguales y paralelas.

Demostración. AB es ∥ a DC (n.º 118), y $AB = DC$. N.º 125

Asímismo, AA' es ∥ e igual a DD'.

∴ el plano AB' es ∥ al DC', N.º 461

y además, $\angle BAA' = \angle CDD'$. N.º 461

∴ $\square AB' = \square DC'$ (n.º 132). L.C.D.D.

EJERCICIO 85

1. Si en la figura anterior las tres caras del triedro A son 80°, 70°, 75°, ¿cuáles son las caras de los otros triedros?

2. Si las caras de un triedro de un paralelepípedo son 85°, 75°, 60°, ¿cuáles son las caras de los otros triedros?

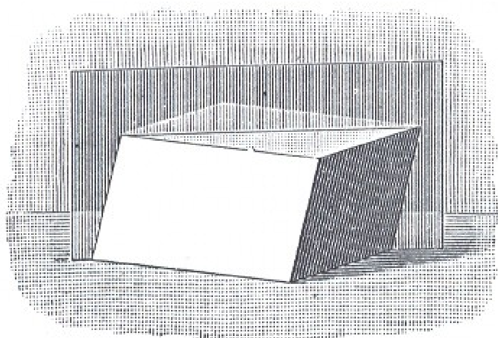
3. Suponiendo que el paralelepípedo de la figura anterior sea rectángulo, y que $AB = 4$, $BC = 3$, $CC' = 3\frac{3}{4}$, calcúlese la diagonal AC'.

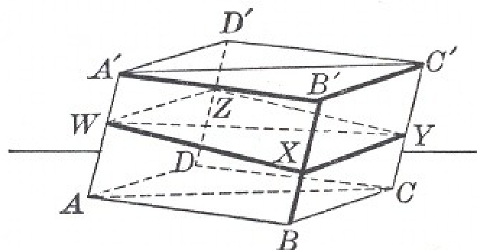
4. Demuéstrese que las diagonales de un paralelepípedo rectángulo son iguales.

5. Las aristas de un paralelepípedo rectángulo son a, b, c. ¿Qué fórmula da la longitud de una diagonal?

Proposición VI. Teorema

527. *El plano que pasa por dos aristas diagonalmente opuestas de un paralelepípedo divide el sólido en dos prismas triangulares equivalentes.*





Sea $ACC'A'$ el plano que pasa por las aristas opuestas AA', CC' del paralelepípedo AC'.

Demostrar que este plano divide AC' en dos prismas triangulares equivalentes ABC-B' y ACD-D'.

Demostración. Sea $WXYZ$ una sección recta.

Las caras opuestas AB', DC' son iguales y paralelas. N.° 526

También lo son las AD' y BC';

$\therefore$ WX es $\parallel$ a ZY, y WZ a XY; N.° 453

$\therefore$ $WXYZ$ es un paralelogramo. N.° 118

El plano AC' corta este ▱ en la diagonal WY; N.° 429

$\therefore$ los △ WXY, YZW son iguales. N.° 126

¿Cómo se demuestra que el prisma ABC-B' es equivalente a uno recto de base WXY y altura AA'?

¿Cómo se demuestra que el prisma CDA-D' es equivalente a uno recto de base YZW y altura AA'?

¿Por qué son equivalentes estos dos prismas rectos?

¿Queda así demostrado el teorema?

¿Cuál es el teorema correspondiente de la geometría plana?

EJERCICIO 86

1. Demuéstrese que las caras laterales de un prisma recto son rectángulos.

2. Demuéstrese que las diagonales de un paralelepípedo se bisectan mutuamente.

3. Las aristas de un paralelepípedo rectángulo son de 5, 6 y 7 cm. respectivamente. Calcúlese el área total de las caras, inclusas las bases.

4. Las caras de un triedro de un paralelepípedo son todas de 60°, y las aristas son de 3, 2 y 1 cm. respectivamente. Calcúlese con dos cifras decimales el área total de las seis caras del sólido.

5. En todo paralelepípedo rectángulo el cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de tres aristas concurrentes.

6. Un alambre de 24 cm. de largo puede tenderse justamente de una esquina a la diagonalmente opuesta de una caja de 6 cm. de profundidad y 12 de anchura. Calcúlese con dos decimales el largo de la caja.

7. La diagonal de la base de un paralelepípedo rectángulo es de 316 mm., y la altura del sólido es de 474 mm. Calcúlese la diagonal del paralelepípedo.

8. El área total de las seis caras de un cubo es de 18 cm. Calcúlese la diagonal.

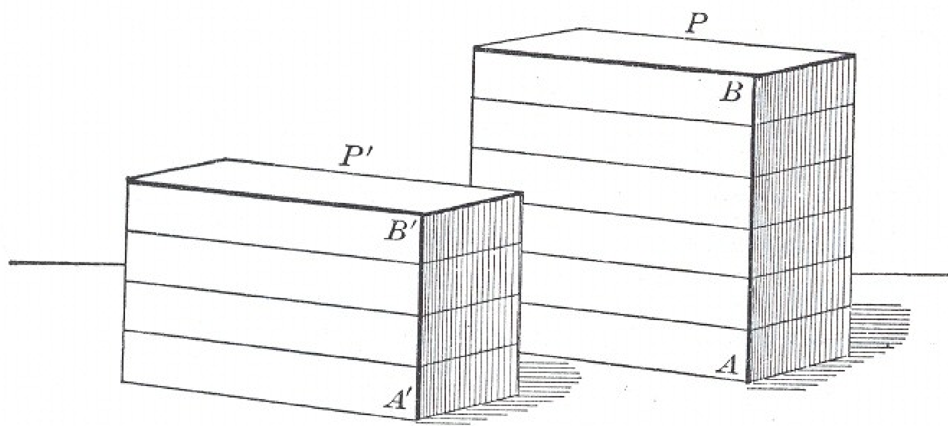
9. La diagonal de una cara de un cubo es $\sqrt{14}$. ¿ Cuál es la del cubo ?

10. La diagonal de un cubo es $2{,}75\sqrt{3}$. Calcúlese la diagonal de las caras.

11. Un depósito de agua tiene 3 m. de largo, 2,5 de ancho, y 1,75 de hondo. ¿ Cuántos metros cuadrados de zinc se necesitan para cubrir su interior, suponiendo que se gasta 1 m.^{2} adicional en las juntas y para cubrir los bordes superiores ?

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

528. *Dos paralelepípedos rectángulos de bases iguales son entre sí como sus alturas.*



Sean P, P' dos paralelepípedos rectángulos de bases iguales y de alturas AB, $A'B'$.

Demostrar que $$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}.$$

CASO 1.º *Cuando AB y $A'B'$ son conmensurables.*

Demostración. Supóngase que una medida común de AB y $A'B'$ (que existe, puesto que AB y $A'B'$ son conmensurables) esté contenida m veces en AB, y n veces en $A'B'$.

Entonces se tendrá: $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{m}{n}.$$

Divídanse AB y $A'B'$ en partes iguales a esa medida común, y por los puntos de división trácense planos ⊥s a AB y $A'B'$.

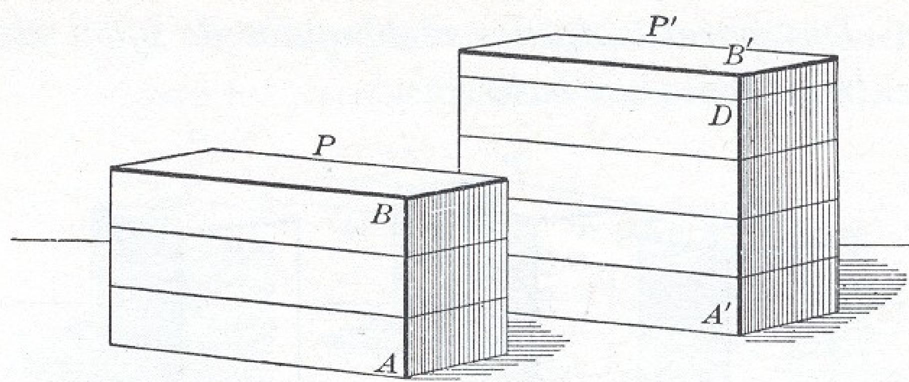
Estos planos dividen el paralelepípedo P en m paralelepípedos y el P' en n, todos iguales. N.º 524

$$\therefore \frac{P}{P'}=\frac{m}{n},$$

y, combinando esta proporción con la anterior,

$$\frac{P}{P'}=\frac{AB}{A'B'}.$$ L.C.D.D

Caso 2.° *Cuando AB y $A'B'$ son inconmensurables.*



Demostración. Divídase AB en un número cualquiera de partes iguales, y colóquese una de ellas sucesivamente sobre $A'B'$ tantas veces como sea posible.

Puesto que AB y $A'B'$ son inconmensurables, se llegará así hasta un punto D, y quedará un residuo DB' menor que una de las partes.

Por D trácese un plano perpendicular a $A'B'$. Representando por Q el paralelepípedo cuya base es igual a la de P' y cuya altura es $A'D$, se tiene:

$$\frac{Q}{P} = \frac{A'D}{AB}. \qquad \text{Caso 1.°}$$

Si el número de partes se aumenta indefinidamente, la razón $Q:P$ tenderá hacia el límite $P':P$, y la $A'D:AB$ tenderá hacia el límite $A'B':AB$. N.° 204

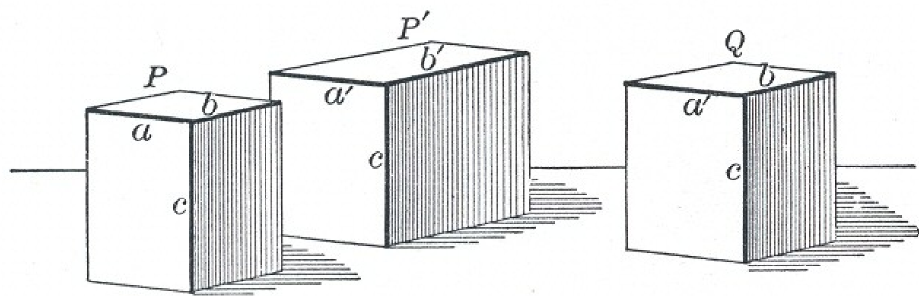
El resto de la demostración es semejante a la última parte de la dada en la página 297, y se deja al estudiante como ejercicio.

529. Dimensiones de un paralelepípedo rectángulo. Llámanse *dimensiones* de un paralelepípedo rectángulo las longitudes de tres aristas concurrentes.

530. Corolario. *Dos paralelepípedos rectángulos que tienen dos dimensiones respectivamente iguales son entre sí como sus terceras dimensiones.*

Proposición VIII. Teorema

531. *Dos paralelepípedos rectángulos de igual altura son entre sí como sus bases.*



Sean P y P' dos paralelepípedos rectángulos de dimensiones a, b c, y a', b', c respectivamente.

Demostrar que $$\frac{P}{P'} = \frac{ab}{a'b'}.$$

Demostración. Sea Q un paralelepípedo rectángulo de dimensiones a', b, c.

Ahora bien, Q tiene dos dimensiones, b y c, iguales a dos de P, y dos, a' y c, iguales a dos de P'. Por tanto,

$$\frac{P}{Q} = \frac{a}{a'},$$

$$\frac{Q}{P'} = \frac{b}{b'}. \qquad \text{N.° 530}$$

Multiplicando miembro a miembro, y suprimiendo el factor común Q, resulta:

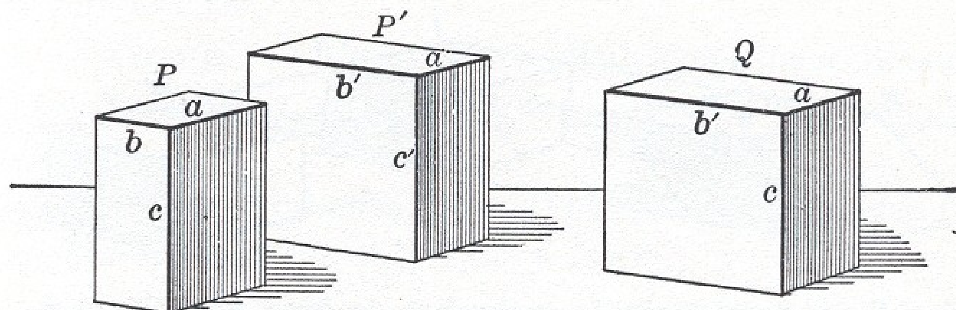
$$\frac{P}{P'} = \frac{ab}{a'b'} \text{ (n.° 52, 2.°).} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

532. Corolario. *Dos paralelepípedos rectángulos que tienen una dimensión común son entre sí como los productos de las otras dos.*

Síguese esto de que cualquiera arista de un paralelepípedo rectángulo puede tomarse por altura, y así puede aplicarse el teorema del n.° 531.

Proposición IX. Teorema

533. *Dos paralelepípedos rectángulos cualesquiera son entre sí como los productos de sus dimensiones.*



Sean P, P' dos paralelepípedos rectángulos de dimensiones a, b, y a', b', c' respectivamente.

Demostrar que $$\frac{P}{P'} = \frac{\text{abc}}{\text{a}'\text{b}'\text{c}'}.$$

Demostración. Sea Q un paralelepípedo rectángulo de dimensiones a, b', c.

$$\frac{P}{Q} = \frac{b}{b'}, \qquad \text{N.° 530}$$

$$\frac{Q}{P'} = \frac{ac}{a'c'}. \qquad \text{N.° 532}$$

$$\therefore \frac{P}{P'} = \frac{abc}{a'b'c'} \text{ (n.° 52, 2.°).} \qquad \text{L.C.D.D.}$$

534. Corolario 1.° *El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de sus tres dimensiones.*

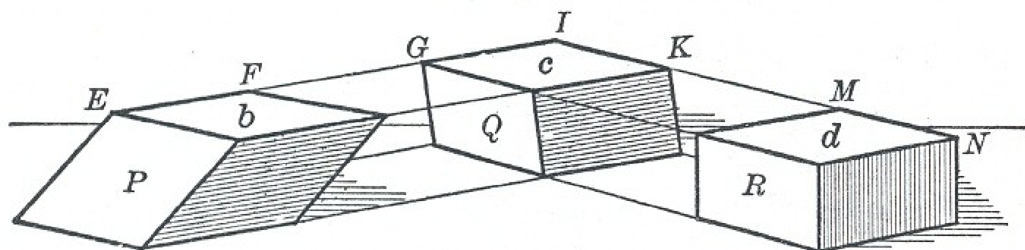
En efecto, si se supone $a' = b' = c' = 1$, se tendrá: $a'b'c' = 1 \times 1 \times 1 = 1$, y volumen de $P' = 1$ (n.° 518). El volumen de P es $P : P'$ (n.° 519), y como $P : P' = abc : a'b'c'$ (n.° 533), resulta: volumen de $P = abc : a'b'c' = abc : 1 = abc$

535. Corolario 2.° *El volumen de un paralelepípedo rectángulo es igual al producto de la base por la altura.*

En efecto, el volumen del paralelepípedo P es igual a abc, y en este producto ab es la base (esto es, el área de la base), y c la altura.

Proposición X. Teorema

536. *El volumen de un paralelepípedo es igual al producto de la base por la altura.*



Sea P un paralelepípedo cualquiera de base b y altura h. El volumen también se representa por P.

Demostrar que $P = \mathrm{bh}$.

Demostración. Prolónguense la arista EF y las paralelas a ella, y córtense en ángulo recto por dos planos situados a una distancia GI igual a EF. Obtiénese así un paralelepípedo Q cuya base c es un rectángulo.

Prolónguense la arista IK y sus paralelas, y córtense en ángulo recto por planos situados a una distancia MN igual a IK. Obtiénese así el paralelepípedo rectángulo R.

Ahora bien, $P = Q,\ Q = R$; N.° 525

$\therefore P = R$. N.° 52, 7.°

Los tres paralelepípedos tienen una misma altura h. N.° 455

Además, $b = c$, N.° 323

$c = d$; N.° 133

$\therefore b = d$. N.° 52, 7.°

También, $R = dh$. N.° 535

$\therefore P = bh$ (n.° 52, 8.°). L.C.D.D.

537. Corolario. *El volumen de un paralelepípedo cualquiera es igual al de uno rectángulo de base equivalente e igual altura.*

EJERCICIO 87

1. ¿En qué relación están los volúmenes de dos paralelepípedos rectángulos cuyas dimensiones son respectivamente 3, 4, 5, y 9, 8, 10?

2. Hállese la relación entre dos paralelepípedos rectángulos de 6 cm. de altura y cuyas bases son respectivamente de 20 y 80 cm.^{2}

3. Hállese el volumen de un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son 2,5, 1,67 y 1,5 m.

4. Hállese el volumen de un paralelepípedo rectángulo cuya base es de 27 cm.^{2} y cuya altura es de 13,5 cm.

5. El volumen y base de un paralelepípedo rectángulo son respectivamente de 1152 cm.^{3} y 72 cm.^{2} ¿Cuál es la altura?

6. El volumen de un paralelepípedo rectángulo de base cuadrada es de 273,8 cm.^{3}, y la altura es de 5 cm. Hállense las dimensiones.

7. Un depósito rectangular de 7,25 m. de largo por 4,5 de ancho contiene agua. ¿Cuánta debe sacarse para que el nivel descienda 1 m.?

8. Hállese con dos decimales la arista de un cubo que contenga 3,25 litros. (1 li. = 1 dm.^{3}).

9. Las dimensiones interiores de una caja de acero son 36, 18 y 8 cm. El espesor de las paredes y tapa es de 3,5 mm Hállese su peso, suponiendo que el acero pesa 8000 kg. por m.^{3}

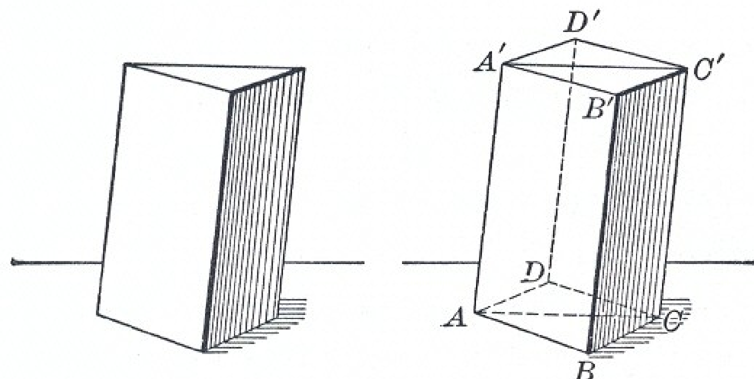
10. Una barra de acero tiene 1,5 m. de largo, 5 cm. de ancho y 2,5 de espesor. ¿Cuál es su peso aproximado?

11. Si 30 cm.^{3} de oro se reducen a láminas cuya superficie total es de 45 m.^{2}, hállese el espesor.

12. La suma de los cuadrados de las cuatro diagonales de un paralelepípedo es igual a la suma de los cuadrados de las doce aristas.

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA

538. *El volumen de un prisma triangular es igual al producto de la base por la altura.*



Sea $ABC\text{-}B'$ un prisma triangular de base b, altura h y volumen V.

Demostrar que $V = bh$.

Demostración. Sobre las aristas AB, BC, BB' constrúyase el paralelepípedo $ABCD\text{-}B'$.

$V = ABC\text{-}B' = \frac{1}{2}\, ABCD\text{-}B'$. N.° 527

Ahora bien, $ABCD\text{-}B' = ABCD \times h$, N.° 536

o, puesto que $ABCD = 2\,b$, N.° 126

$ABCD\text{-}B' = 2\,bh$.

$\therefore\ V = \frac{1}{2}(2\,bh) = bh$ (n.° 52, 8.°). L.C.D.D.

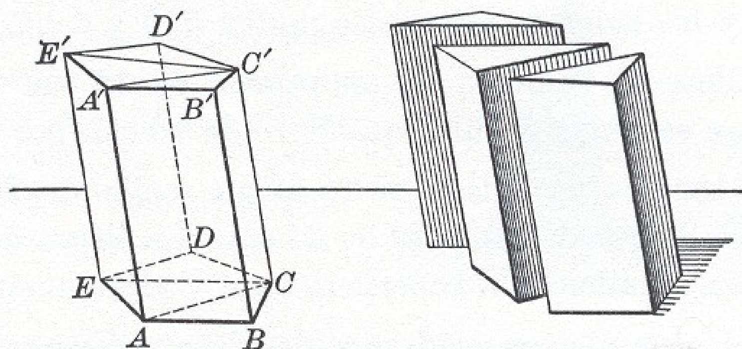
EJERCICIO 88

Hállense los volúmenes de los prismas triangulares cuyas bases y alturas son respectivamente:

1. 17 cm.², 8 cm.
2. 15,75 cm.², 3 cm.
3. 3,25 m.², 1,7 m.
4. 5,6 cm.², 2,75 cm.
5. 15,84 m.², 3,8 m.
6. 16,67 m.², 2,4 m.
7. 22,5 cm.², 4,5 cm.
8. 33,3 mm.², 7,2 mm.
9. 42,875 cm.², 3,375 cm.
10. 27,6 cm.², 3,75 cm.

Proposición XII. Teorema

539. *El volumen de un prisma cualquiera es igual al producto de la base por la altura.*



Sea AC' un prisma de base b, altura h y volumen V.

Demostrar que $V = bh$.

Demostración. ¿Puede el prisma dividirse en prismas cuyo volumen se sabe ya hallar?

¿Cómo puede hacerse esta división?

¿Cuál es el volumen de cada uno de los prismas obtenidos de esta manera? N.° 538

¿A qué es igual la suma de ellos?

¿A qué es igual la suma de sus bases?

¿A qué es igual la altura común de estos prismas?

¿Qué se deduce de todo esto?

Dé el alumno la demostración completa.

540. Corolario 1.° *Dos prismas de una misma altura son entre sí como sus bases; y dos de una misma base, como sus alturas.*

Dése la demostración completa de esta proposición.

541. Corolario 2.° *Dos o más prismas de bases equivalentes y alturas iguales son equivalentes.*

Dése la demostración completa de esta proposición.

EJERCICIO 89

1. Hállese la superficie total de un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son 8, 9 y 18 cm.

2. Hállese el volumen de un prisma triangular de 15 cm. de altura y los lados de cuya base miden 5, 5 y 6 cm.

3. Hállese el volumen de un prisma de 15 cm. de altura y cuya base es un triángulo equilátero de 10 cm. por lado.

4. La base de un prisma recto es un rombo de 20 cm. por lado y cuya diagonal menor es de 24 cm. La altura del prisma es de 30 cm. Hállense la superficie total y el volumen.

5. ¿Cuántos metros cuadrados de plomo se necesitan para revestir el interior de una caja de 1,35 m. de largo, 0,8 m. de ancho y cuya capacidad es de 1,134 $m.^3$?

6. ¿Cuántos centímetros cuadrados de zinc se necesitan para forrar el interior de una caja cuya base es de 9×12 cm. y cuya capacidad es de 864 $cm.^3$?

7. Representando por a la arista de un cubo, hállense fórmulas para el volumen, la superficie total y la longitud de las diagonales.

8. Representando por d la diagonal de las caras de un cubo, ¿cómo se expresa el volumen? ¿Cómo se expresa la superficie total de las seis caras?

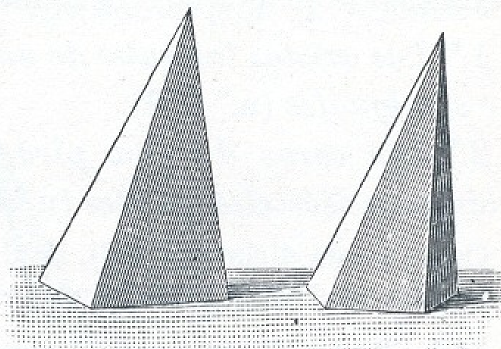
9. ¿Cómo se expresan la superficie total y el volumen de un paralelepípedo rectángulo de dimensiones a, b, c?

10. Hállese el volumen de un prisma en que las bases son exágonos regulares de 10 cm. por lado y en que la altura es de 120 cm.

11. Un receptáculo de hierro tiene por dimensiones interiores 4,5, 3 y 2 m., y espesor de 10 mm. ¿Cuál es su peso: a) vacío; b) lleno de agua? (Supóngase que el agua pesa 1 kg. por litro y el hierro 7,2 veces más.)

542. Pirámide. Llámase *pirámide* un poliedro en que una de las caras, llamada *base*, es un polígono cualquiera y las otras caras son triángulos que tienen un vértice común.

En la pirámide, el término *cara* se aplica casi exclusivamente a estos triángulos. Su vértice común se llama *vértice* de la pirámide, y las intersecciones de sus planos, *aristas laterales*. La base puede ser un polígono cualquiera, pero de ordinario se sobrentiende que es convexo.



543. Área lateral. Llámase *área lateral* de una pirámide la suma de las áreas de sus caras.

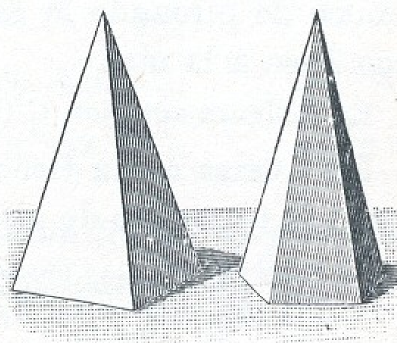
544. Altura. Llámase *altura* de una pirámide la longitud de la perpendicular del vértice al plano de la base.

545. Clasificación de las pirámides según la base. Dícese que una pirámide es *triangular*, *cuadrangular*, etc., según que su base sea un triángulo, un cuadrilátero, etc.

La pirámide triangular se llama *tetraedro*. Como todas sus caras son triángulos, cualquiera de ellas puede tomarse por base.

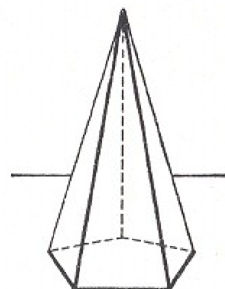
546. Pirámide regular. Llámase *pirámide regular* aquella cuya base es un polígono regular y cuyo vértice se halla en la perpendicular levantada al plano de la base en el centro de ese polígono.

La pirámide regular se llama también *pirámide recta*.



547. Apotema de una pirámide regular. Se llama *apotema* de una pirámide regular la altura común de los triángulos que forman sus caras, tomando por bases de los triángulos los lados de la base de la pirámide

548. Propiedades de las pirámides regulares. Entre las propiedades de las pirámides regulares pueden enunciarse las siguientes sin demostración especial, por ser consecuencias inmediatas de principios ya demostrados:

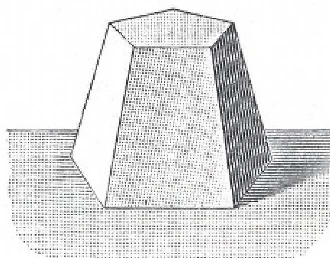


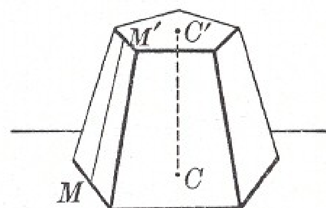
1.ª *Las aristas laterales de una pirámide regular son iguales* (n.° 439).

2.ª *Las caras de una pirámide regular son triángulos isósceles iguales* (n.° 80).

Como queda dicho (n.° 547), la altura común de estos triángulos es el apotema de la pirámide.

549. Pirámide truncada o tronco de pirámide. Llámase *pirámide truncada* o *tronco de pirámide* la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección determinada por un plano paralelo a la base.





Esta sección y la base de la pirámide se llaman *bases* del tronco. La menor se llama a veces *base superior*, y la otra *base inferior*.

550. Altura de un tronco de pirámide. Llámase *altura* de un tronco de pirámide la longitud de la perpendicular trazada de una base a la otra.

En la figura anterior, $C'C$ es la altura del tronco.

551. Caras de un tronco de pirámide. Llámanse comúnmente *caras* de un tronco de pirámide las caras limitadas por las bases.

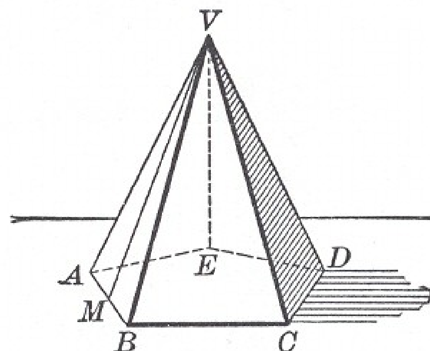
Es evidente que las caras de un tronco de pirámide son trapecios, y que, si la pirámide es regular, las caras del tronco son iguales. Llámase *área lateral* del tronco la suma de las áreas de las caras.

552. Apotema de un tronco de pirámide. Llámase *apotema* de un tronco de pirámide regular la altura de los trapecios que forman sus caras.

En la figura anterior, MM' es el apotema.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

553. *El área lateral de una pirámide regular es igual a la mitad del producto del apotema por el perímetro de la base.*



Sea *V-ABCDE* una pirámide regular en que el perímetro de la base es *p*, el área lateral *L* y el apotema *a*.

Demostrar que $L = \frac{1}{2}$ ap.

Demostración. Los ⚠ *VAB, VBC, VCD, VDE* y *VEA* son iguales. N.º 548

El área de cada $\triangle = \frac{1}{2} a \times$ la base. N.º 325

La suma de las bases de los ⚠ $= p$; N.º 52, 10.º

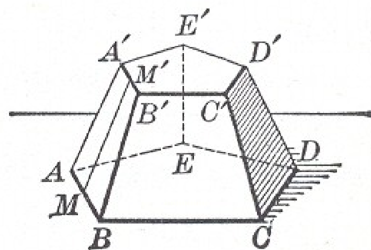
∴ la suma de las áreas de los ⚠ $= \frac{1}{2} ap$. N.º 52, 1.º

La suma de las áreas de los ⚠ $= L$. N.º 543

∴ $L = \frac{1}{2} ap$ (n.º 52, 7.º). L.C.D.D.

554. COROLARIO. *El área lateral de un tronco de pirámide regular es igual a la semisuma de los perímetros de las bases multiplicada por el apotema.*

¿A qué es igual el área de un trapecio? ¿Son iguales todos estos trapecios? ¿A qué es igual la suma de sus bases inferiores? ¿la de sus bases superiores? Exprésese este teorema por medio de una fórmula.

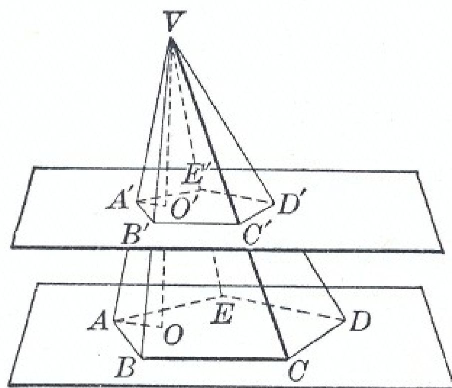


PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA

555. *Si se corta una pirámide cualquiera por un plano paralelo a la base,*

1.° *El plano divide las aristas y la altura proporcionalmente;*

2.° *La sección es un polígono semejante a la base.*



Sea V-$ABCDE$ **una pirámide cortada en** $A'B'C'D'E'$ **por un plano paralelo a la base.**

1.° *Demostrar que* $\frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \cdots = \frac{VO'}{VO}$.

Demostración. Puesto que el plano $A'D'$ es $\parallel$ al AD, Por hipót.

$A'B'$ es $\parallel$ a AB, $B'C'$ a $BC \ldots$, $A'O'$ a AO; N.° 453

$\therefore \frac{VA'}{VA} = \frac{VB'}{VB} = \cdots = \frac{VO'}{VO}$ (n.° 274). L. C. D. D.

2.° *Demostrar que* $A'B'C'D'E'$ *es semejante a* $ABCDE$.

Demostración. Puesto que el $\triangle VA'B'$ es semejante al VAB, el $VB'C'$ al VBC, etc. (¿por qué?), ¿cómo se demuestra que los lados de los dos polígonos son proporcionales?

Puesto que $A'B'$ es $\parallel$ a AB, $B'C'$ a BC, etc. (¿por qué?), ¿cómo se demuestra la igualdad de los $\measuredangle$ homólogos?

Y ahora, ¿por qué son semejantes los dos polígonos?

556. Corolario 1.° *El área de toda sección paralela a la base de una pirámide es al área de la base como el cuadrado de la distancia de la sección al vértice es al cuadrado de la altura de la pirámide.*

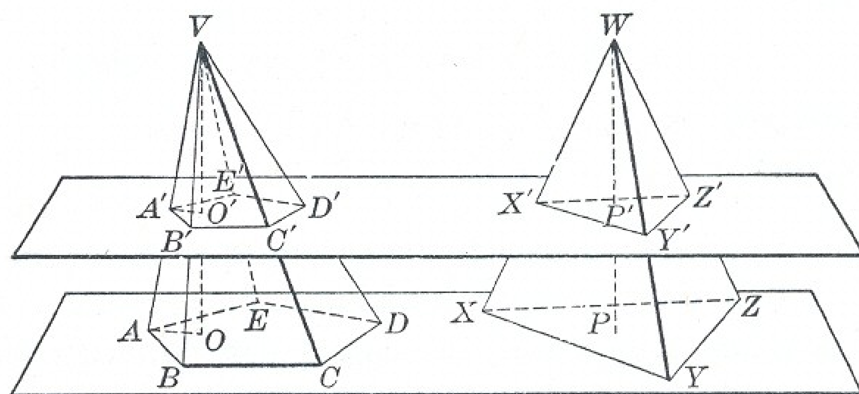
En efecto, $$\frac{VO'}{VO} = \frac{VA'}{VA} \qquad \text{N.° 555}$$

$$= \frac{A'B'}{AB}; \qquad \text{N.° 288}$$

de donde $$\frac{\overline{VO'}^2}{\overline{VO}^2} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}. \qquad \text{N.° 270}$$

También, $$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE} = \frac{\overline{A'B'}^2}{\overline{AB}^2}, \qquad \text{N.° 334}$$

y por tanto, $$\frac{A'B'C'D'E'}{ABCDE} = \frac{\overline{VO'}^2}{\overline{VO}^2}. \qquad \text{N.° 52, 7.°}$$

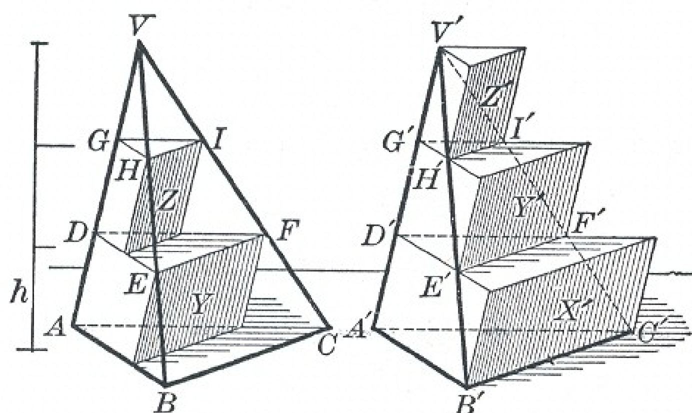


557. Corolario 2.° *Son equivalentes las secciones determinadas en dos pirámides de alturas iguales y bases equivalentes por planos paralelos a las bases y equidistantes de ellas.*

¿Cuál es la relación de $A'B'C'D'E'$ a $ABCDE$?
¿Cómo puede demostrarse que es igual a $\overline{VO'}^2 : \overline{VO}^2$?
¿Cuál es la relación de $X'Y'Z'$ a XYZ?
¿Cómo puede demostrarse que es igual a $\overline{WP'}^2 : \overline{WP}^2$?
¿Son iguales $\overline{VO'}^2 : \overline{VO}^2$ y $\overline{WP'}^2 : \overline{WP}^2$?
Puesto que $ABCDE =$ (en área) XYZ, ¿qué se deduce en cuanto a $A'B'C'D'E'$ y $X'Y'Z'$?

Proposición XV. Teorema

558. *Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.*



Sean $V\text{-}ABC$, $V'\text{-}A'B'C'$ **dos pirámides de igual altura y bases equivalentes.**

Demostrar que $V\text{-}ABC$ *y* $V'\text{-}A'B'C'$ *son equivalentes.*

Demostración. Supóngase que no lo son, y que

$$V'\text{-}A'B'C' > V\text{-}ABC.$$

Colóquense las bases en un mismo plano, divídase la altura en n partes iguales h, y por los puntos de división trácense planos paralelos a las bases, los cuales determinarán las secciones DEF, $D'E'F'$, etc.

Sobre $A'B'C'$, $D'E'F'$ . . . constrúyanse prismas de aristas laterales paralelas a $A'V'$ y de altura h. En la figura están marcados X', Y', Z'.

Sobre DEF, GHI, etc. como bases superiores constrúyanse prismas Y, Z, etc. de altura h y de aristas laterales ‖s a VA.

Ahora bien,	área $DEF =$ área $D'E'F'$,	N.° 557
	$h = h$;	Ident.
	∴ prisma $Y =$ (en volumen) prisma Y'.	N.° 541
Asímismo,	prisma $Z =$ prisma Z'.	

Como $$X' + Y' + Z' > V'\text{-}A'B'C',$$
y también $$Y + Z < V\text{-}ABC,$$
síguese que
$$V'\text{-}A'B'C' - V\text{-}ABC < X' + Y' + Z' - (Y + Z),$$
o sea, que $$V'\text{-}A'B'C' - V\text{-}ABC < X'.$$

Esto es, la diferencia entre las dos pirámides es menor que la diferencia entre los dos grupos de prismas.

Ahora bien, aumentando n, y disminuyendo por tanto h, X' puede hacerse tan pequeño como se quiera.

Sea cual fuere la diferencia entre las dos pirámides, si la hay, X' puede hacerse menor que ella.

Esto es absurdo, pues se ha visto que X' es siempre mayor que la diferencia en cuestión.

De la misma manera puede demostrarse que la suposición $V\text{-}ABC > V'\text{-}A'B'C'$ conduce a un absurdo.

Puesto que $V\text{-}ABC$ no puede ser mayor ni menor que $V'\text{-}A'B'C'$, debe tenerse:
$$V\text{-}ABC = V'\text{-}A'B'C'.$$ L. C. D. D.

EJERCICIO 90

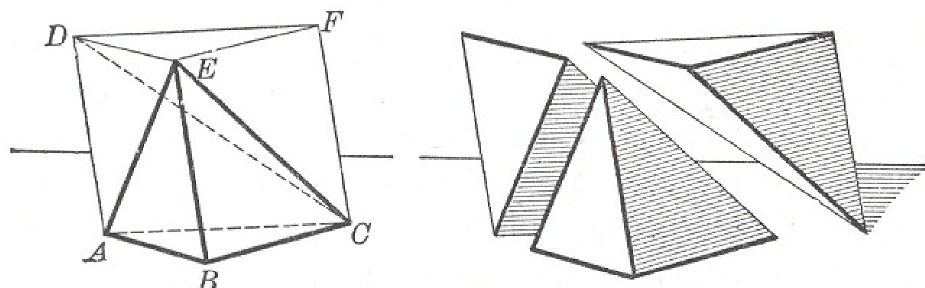
1. Hállese el área lateral de una pirámide regular cuya altura es de 6 cm. y cuya base es un triángulo equilátero de altura $2\sqrt{3}$ cm.

2. El apotema de una pirámide triangular regular es igual a la altura de la base, y el área de ésta es $\sqrt{3}$ m.² ¿Cuál es el área total de la pirámide?

3. La base de una pirámide es un triángulo rectángulo en que la hipotenusa y un cateto son de 5 y 3 m. respectivamente. Otra de igual altura tiene por base un triángulo equilátero cuyo lado es de $2\sqrt{2\sqrt{3}}$ m. Demuéstrese que estas dos pirámides son equivalentes.

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA

559. *El volumen de una pirámide triangular es igual a un tercio del producto de la base por la altura.*



Sea *E-ABC* una pirámide triangular de base *b*, altura *h* y volumen *V*.

Demostrar que $V = \frac{1}{3}$ bh.

Demostración. Constrúyase el prisma ABC-DEF.

Por DE y EC trácese el plano CDE.

El prisma es igual a la suma de las tres pirámides triangulares E-ABC, E-CFD y E-ACD. Las E-CFD y E-ACD tienen igual altura e iguales bases CFD, ACD; N.º 126

$\therefore E\text{-}CFD = E\text{-}ACD.$ N.º 558

Pero E-CFD es también C-DEF, cuya altura es igual a la de E-ABC, y cuya base DEF es igual a la ABC; N.º 511

$\therefore E\text{-}CFD = E\text{-}ABC;$ N.º 558

$\therefore E\text{-}ABC = E\text{-}CFD = E\text{-}ACD;$ N.º 52, 7.º

$\therefore E\text{-}ABC = \frac{1}{3}$ del prisma ABC-DEF.

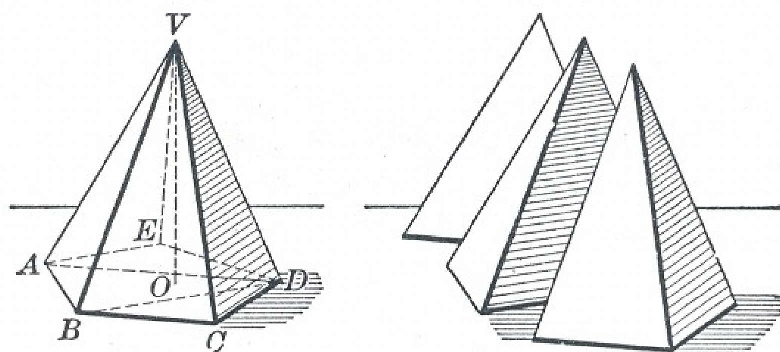
Ahora bien, $ABC\text{-}DEF = bh.$ N.º 539

$\therefore V = \frac{1}{3} bh.$ L.C.D.D.

560. COROLARIO. *Una pirámide triangular es equivalente a un tercio del prisma que tiene la misma base y la misma altura que la pirámide.*

Proposición XVII. Teorema

561. *El volumen de una pirámide cualquiera es igual a un tercio del producto de la base por la altura.*



Sea *V-ABCDE* una pirámide de base *b* y altura *h*.

Demostrar que volumen V-ABCDE $= \frac{1}{3}$ bh.

Demostración. Trácense planos por la arista VD y las diagonales DA, DB de la base.

Estos planos dividen la pirámide dada en tres pirámides triangulares.

¿Cuáles son las pirámides así formadas?

¿Cuál es la altura de estas tres pirámides?

¿Qué relación hay entre la base de la pirámide dada y las bases de las tres en que se ha dividido?

¿A qué es igual el volumen de cada una de éstas?

¿Qué relación hay entre el volumen de la pirámide dada y los volúmenes de las otras tres? ¿Qué factor común tienen las expresiones de los volúmenes de esas tres?

Complétese la demostración.

562. Corolario. *Los volúmenes de dos pirámides son entre sí como los productos de sus bases por sus alturas; los de dos pirámides de bases equivalentes, como las alturas; los de dos pirámides de igual altura, como las bases. Dos pirámides de igual altura y bases equivalentes son equivalentes.*

EJERCICIO 91

Hállense las áreas laterales de las pirámides regulares en que el apotema y el perímetro de la base, en centímetros, son:

1. $a = 34,\quad p = 57.$

2. $a = 8{,}75, p = 17{,}125.$

3. $a = 20{,}6, p = 48.$

4. $a = 135,\quad p = 500.$

Hállense las áreas laterales de las pirámides regulares truncadas en que a, p *y* p′ *(perímetro de la base superior), en centímetros, son:*

5. $a = 4,\ p = 8,\ p' = 6.$

6. $a = 5{,}125,\ p = 9{,}75,\ p' = 7{,}75.$

7. $a = p = 10,\ p' = 5.$

Hállense los volúmenes de las pirámides cuyas bases y alturas son:

8. $b = 9$ cm.^{2}, $h = 7$ cm.

9. $b = 23$ cm.^{2}, $h = 6$ cm.

10. $b = 51$ cm.^{2}, $h = 17$ cm.

11. $b = 5{,}125$ cm.^{2}, $h = 3{,}125$ cm.

12. $b = 19$ cm.^{2}, $h = 4{,}375$ cm.

13. $b = 325$ mm.^{2}, $h = 27{,}5$ mm.

Hállense las áreas laterales de las pirámides regulares en que el apotema, el número de caras y la longitud del lado de la base son:

14. $a = 2{,}3$ m., $n = 4$, $l = 2{,}1$ m.

15. $a = 3{,}7$ cm., $n = 6$, $l = 2{,}9$ cm.

16. $a = 5{,}33$ m., $n = 8$, $l = 3$ m.

Hállense los volúmenes de las pirámides en que los datos son los siguientes:

17. $h = 7$ cm., base cuadrada de 2 cm. por lado.

18. $h = 6{,}75$ cm., base cuadrada cuya diagonal es $3\sqrt{2}$ cm.

19. $h = 8{,}9$ m., base triangular equilátera de 3,7 m. por lado.

20. Hállese el área lateral de una pirámide regular cuyo apotema es de 16 cm. y cuya base es un exágono de 12 cm. por lado.

21. Hállese el área lateral de una pirámide regular cuyo apotema es de 8 cm. y cuya base es un pentágono de 5 cm. por lado.

22. Hállese el área total de una pirámide regular en que a (apotema) $= 6$ cm. y la base es un cuadrado de 4 cm. por lado.

23. Hállese el área total de una pirámide regular en que $a = 18$ m. y la base es un cuadrado de 8 m. por lado.

24. Hállese el área total de una pirámide regular en que $a = 16$ mm. y la base es un triángulo de 8 mm. por lado.

25. El volumen de una pirámide es de 29,4 m.^{3} La base es un cuadrado de 3,5 m. por lado. Hállese la altura.

26. El volumen de una pirámide triangular es de 20 m.^{3}, y los lados de la base, de 5, 4 y 3 m. Hállese la altura.

27. Hállese el volumen de una pirámide regular de base cuadrada de 30 cm. por lado y arista lateral de 1,01 m.

28. Hállese el volumen de una pirámide regular en que $a = 12$ m. y la base es un triángulo inscrito en un círculo de 10 m. de radio.

29. El área total de una pirámide regular que tiene por base un cuadrado de lado l es A. Exprésese la altura h.

30. ¿Cuál es la expresión del volumen de la pirámide anterior?

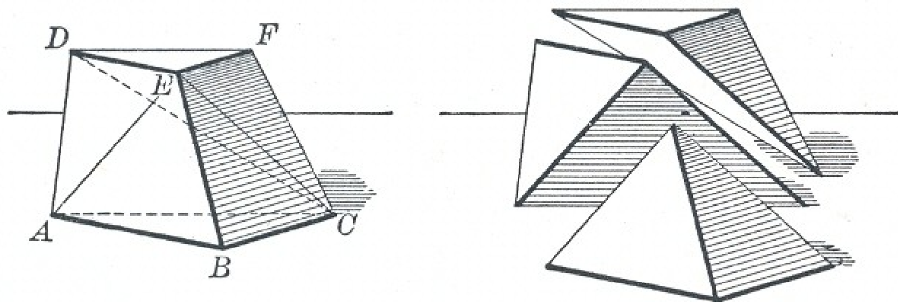
31. Si A es el área total de una pirámide regular de base cuadrada y en que todas las aristas son iguales, exprésese la arista en función de A.

32. Dadas A y h en una pirámide regular cuadrada, ¿cómo se halla l?

33. Indíquese cómo puede dividirse un poliedro cualquiera en pirámides para hallar su voulmen.

Proposición XVIII. Teorema

563. *Todo tronco de pirámide triangular es equivalente a la suma de tres pirámides cuya altura común es la del tronco y cuyas bases son respectivamente las del tronco y la media proporcional entre éstas.*



Sea *ABC-DEF* un tronco de pirámide triangular, las áreas de cuyas bases *ABC* y *DEF* son b y b' respectivamente, y cuya altura es h.

Demostrar que $ABC\text{-}DEF = \frac{1}{3}\,\mathrm{bh} + \frac{1}{3}\,\mathrm{b'h} + \frac{1}{3}\,\mathrm{h}\sqrt{\mathrm{bb'}}$.

Demostración. Trácese un plano por A, E, C, y otro por C, D, E. Estos planos dividen el tronco en tres pirámides.

$$E\text{-}ABC = \tfrac{1}{3}\,bh,\ C\text{-}DEF = \tfrac{1}{3}\,b'h. \qquad \text{N.° 559}$$

Basta pues demostrar que

$$E\text{-}ACD = \tfrac{1}{3}\,h\sqrt{bb'}.$$

Como se ve en la figura, $E\text{-}ABC$ es la misma pirámide que $C\text{-}ABE$, y $E\text{-}ACD$ la misma que $C\text{-}AED$.

Ahora bien,

$$C\text{-}ABE : C\text{-}AED = \triangle ABE : \triangle AED. \qquad \text{N.° 562}$$

Puesto que los $\triangle$ ABE y AED tienen por altura común la del trapecio $ABED$,

$$\triangle ABE : \triangle AED = AB : DE; \qquad \text{N.° 327}$$

$$\therefore\ C\text{-}ABE : C\text{-}AED = AB : DE, \qquad \text{N.° 52, 7.°}$$

o bien, $$E\text{-}ABC : E\text{-}ACD = AB : DE. \qquad \text{N.° 52, 8.°}$$

Asímismo, $E\text{-}ACD$ y $E\text{-}CFD$ tienen un mismo vértice y las bases en un mismo plano; luego

$$E\text{-}ACD : E\text{-}CFD = \triangle ACD : \triangle CFD. \qquad \text{N.° 562}$$

Puesto que los $\triangle$s ACD y CFD tienen por altura común la del trapecio $ACFD$,

$$\triangle ACD : \triangle CFD = AC : DF; \qquad \text{N.° 327}$$

$$\therefore E\text{-}ACD : E\text{-}CFD = AC : DF. \qquad \text{N.° 52, 7.°}$$

El $\triangle DEF$ es semejante al ABC. N.° 555

$$\therefore AB : DE = AC : DF. \qquad \text{N.° 282}$$

$$\therefore E\text{-}ABC : E\text{-}ACD = AC : DF. \qquad \text{N.° 52, 7.°}$$

$$\therefore E\text{-}ABC : E\text{-}ACD = E\text{-}ACD \;\; E\text{-}CFD. \qquad \text{N.° 52, 7.°}$$

Ahora bien, $E\text{-}CFD$ es la misma pirámide que $C\text{-}DEF$, cuyo volumen es $\frac{1}{3}b'h$.

$$\therefore \tfrac{1}{3}bh : E\text{-}ACD = E\text{-}ACD : \tfrac{1}{3}b'h. \qquad \text{N.° 52, 8.°}$$

$$\therefore E\text{-}ACD = \sqrt{\tfrac{1}{3}bh \times \tfrac{1}{3}b'h} \qquad \text{N.° 262}$$

$$= \tfrac{1}{3}h\sqrt{bb'}.$$

$$\therefore E\text{-}ABC + C\text{-}DEF + E\text{-}ACD = \tfrac{1}{3}bh + \tfrac{1}{3}b'h + \tfrac{1}{3}h\sqrt{bb'}, \qquad \text{N.° 52, 1.°}$$

o sea, $ABC\text{-}DEF = \frac{1}{3}bh + \frac{1}{3}b'h + \frac{1}{3}h\sqrt{bb'}$ (n.° 52, 8.°). L. C. D. D.

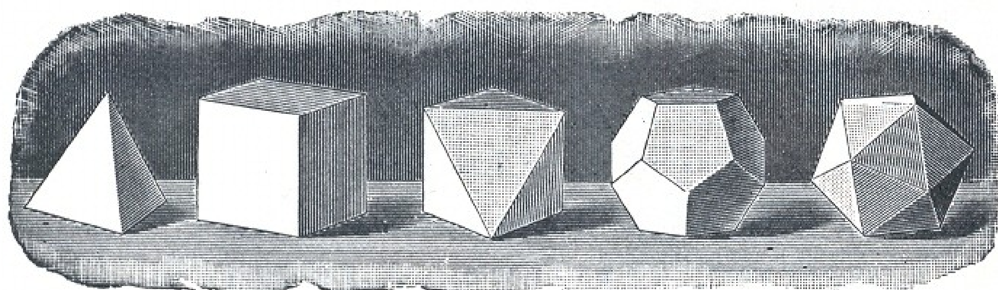
564. Corolario 1.° *El volumen V de un tronco de pirámide triangular puede expresarse por la fórmula*

$$V = \tfrac{1}{3}\mathrm{h}(\mathrm{b} + \mathrm{b}' + \sqrt{\mathrm{bb}'}).$$

565. Corolario 2.° *El volumen de un tronco cualquiera de pirámide es igual a la suma de los de tres pirámides cuya altura común es la del tronco y cuyas bases son respectivamente las del tronco y la media proporcional entre éstas.*

Prolónguense las caras del tronco V hasta su intersección, y sea P la pirámide así formada. Sean P' una pirámide triangular de base equivalente a la de P y de igual altura, y V' un tronco de P' de la misma altura que V. Ahora bien, $P = P'$, $V = V'$, y las bases de V son equivalentes a las de V'. Complétese la demostración.

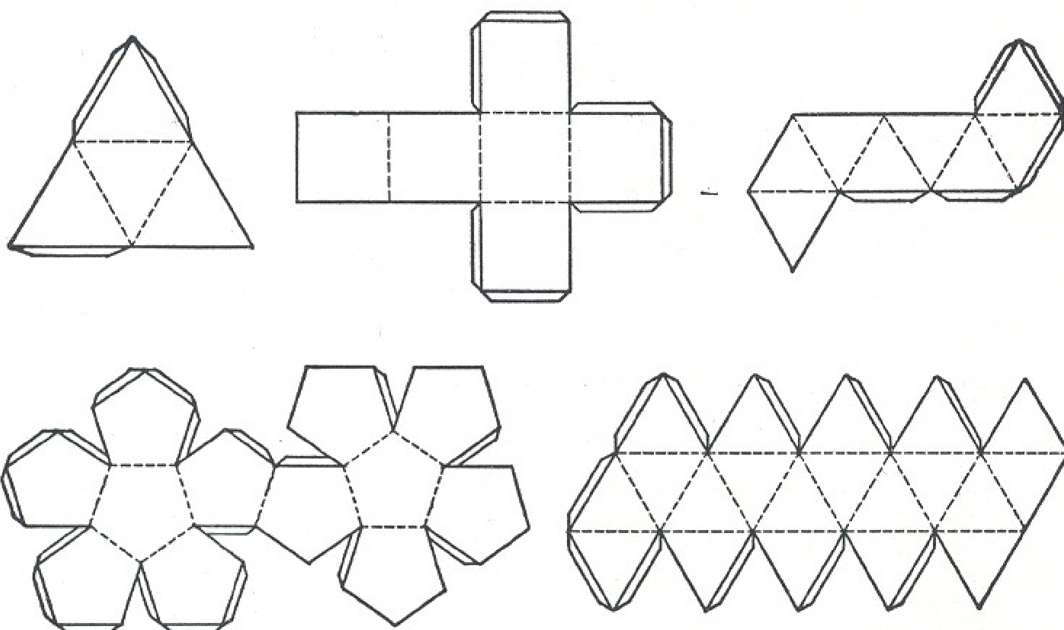
566. Clasificación de los poliedros según el número de caras. Se llama *tetraedro* el poliedro de cuatro caras; *exaedro* el de seis; *octaedro* el de ocho; *dodecaedro* el de doce; *icosaedro* el de veinte.



Tetraedro Exaedro Octaedro Dodecaedro Icosaedro

567. Poliedro regular. Llámase *poliedro regular* aquel cuyas caras son polígonos regulares iguales y cuyos ángulos poliedros son todos iguales.

Se demuestra en la página siguiente que no puede haber más de cinco clases de poliedros regulares convexos. Pueden construírse de cartón como indican las figuras siguientes:



Trácense estas figuras en cartón. Córtense según las líneas continuas, y péguense tiras de papel en los bordes. Luégo dóblense según las líneas de puntos, y péguense los bordes con las tiras de papel.

PROPOSICIÓN XIX. PROBLEMA

568. *Determinar el número de poliedros convexos regulares que pueden existir.*

Un ángulo poliedro convexo debe tener por lo menos tres planos, y la suma de sus caras debe ser menor que 360° (n.° 495).

1.° Puesto que cada ángulo de un triángulo equilátero es de 60°, pueden formarse ángulos poliedros convexos juntando tres, cuatro o cinco triángulos equiláteros. La suma de seis ángulos de 60° es 360°, y por tanto mayor que la de las caras de todo ángulo poliedro convexo. Por tanto, puede haber sólo tres poliedros regulares de caras triangulares.

2.° Puesto que cada ángulo de un cuadrado es de 90°, puede formarse con tres cuadrados un ángulo poliedro. La suma de cuatro ángulos de 90° es 360°, y por tanto puede haber sólo un poliedro regular de caras cuadradas.

3.° Puesto que cada uno de los ángulos de un pentágono regular es de 108° (n.° 145), puede formarse un ángulo poliedro juntando tres pentágonos regulares. La suma de cuatro ángulos de 108° es 432°, y por tanto no puede haber ángulo poliedro convexo que los tenga por caras, ni más de un poliedro regular de caras pentagonales.

4.° La suma de tres ángulos de un exágono regular es 360°; la de tres de un eptágono regular (polígono regular de siete lados) es mayor que 360°, y la de tres de cualquier polígono regular de más de siete lados es también mayor que 360°.

Luego *no puede haber más de cinco poliedros regulares convexos.*

Estos poliedros son: el *tetraedro*, el *exaedro*, el *octaedro*, el *dodecaedro* y el *icosaedro* regulares.

Constrúyanse estos poliedros siguiendo las instrucciones dadas en la página anterior.

Los poliedros regulares se han llamado *cuerpos platónicos*, por haberlos estudiado con mucho ahinco los discípulos de Platón.

¿Qué nombre se da comúnmente al exaedro regular?

EJERCICIO 92

Hállense los volúmenes de los troncos de pirámide en que los datos son :

1. $h = 3$ cm., $b = 8$ cm.², $b' = 2$ cm.²
2. $h = 4\frac{1}{2}$ pulg., $b = 8\frac{1}{3}$ pulg. c., $b' = 3$ pulg. c.
3. $h = 3{,}2$ m., $b = 2$ m.², $b' = 0{,}18$ m.²
4. $h = 2{,}6$ m., $b = 10$ m.², $b' = 2{,}5$ m.²
5. $h = 3{,}5$ cm., $b = 24$ cm.², $b' = 6$ cm.²

6. Una pirámide de 2 m. de altura y 8 m.² de base se corta por un plano paralelo a la base a 1 m. del vértice. Hállese el volumen del tronco así determinado.

7. Si una pirámide de 30 cm. de altura y 8100 cm.² de base se corta por un plano paralelo a la base a 20 cm. de ésta, ¿ cuál es el volumen del tronco así obtenido ?

8. La base inferior de un tronco de pirámide es un cuadrado de 8 cm. por lado. El lado de la superior es la mitad del de la inferior, y la altura del tronco es igual al lado de la base superior. ¿Cuál es el volumen ?

9. La base inferior de un tronco de pirámide es un cuadrado de 3 cm. por lado. El área de la superior es la mitad del área de la inferior, y la altura del tronco es de 2 cm. ¿Cuál es el volumen ?

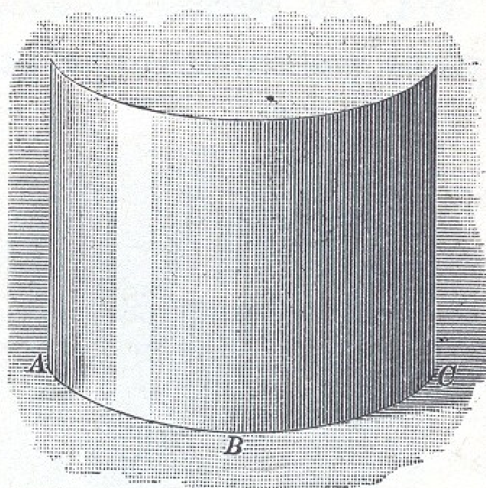
10. Hállese el volumen de una pirámide de seis aristas cuya longitud común es de 1 m.

11. Calcúlese la arista de un tetraedro regular cuyo volumen es $2\sqrt{2}$ cm.³

12. La base de una pirámide regular es un cuadrado de lado l. Siendo a el apotema, exprésese el área total de la superficie.

13. Discútase la fórmula $V = \frac{1}{3}h(b + b' + \sqrt{bb'})$ del n.° 564 cuando $b' = 0$ y cuando $b' = b$.

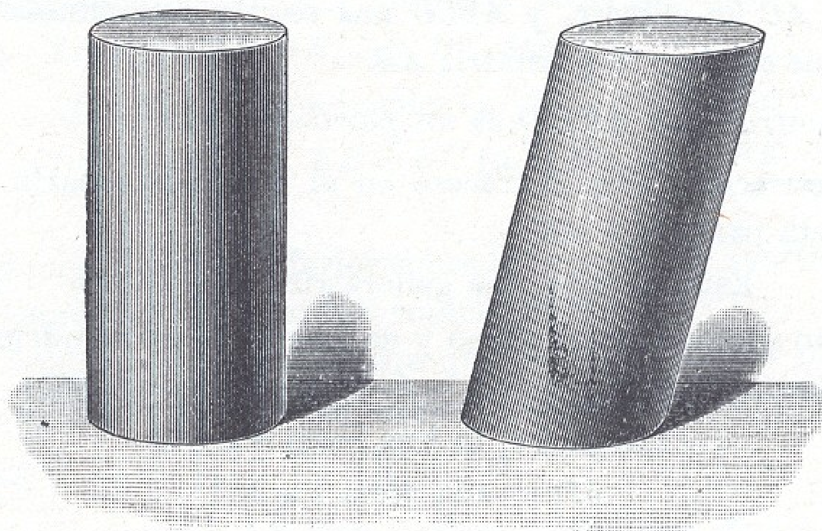
569. Superficie cilíndrica. Denomínase *superficie cilíndrica* la engendrada por una recta que se mueve de tal modo que es siempre paralela a una recta fija y pasa por una curva fija cuyo plano no contiene la recta fija.



La curva fija es la *directriz.* En esta figura lo es *ABC.*

570. Generatriz. Llámase *generatriz* de una superficie cilíndrica tanto la recta que la engendra como toda recta que representa ésta en una de sus posiciones.

571. Cilindro. Llámase *cilindro* un sólido limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies planas paralelas.



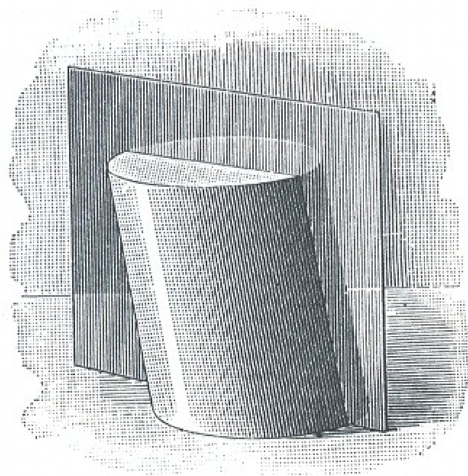
Los términos *base*, *altura* y *área lateral* se usan como en los prismas. *Todas las generatrices de un cilindro son iguales.*

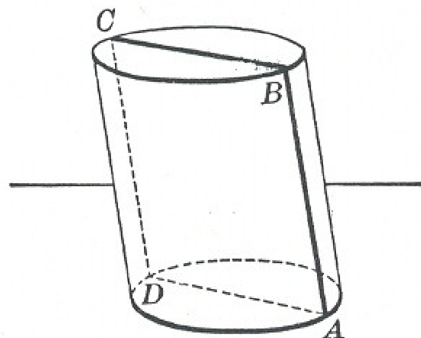
572. Cilindros recto y oblicuo. Un cilindro es *recto* cuando su generatriz es perpendicular a las bases; de lo contrario, *oblicuo*

573. Sección de un cilindro. Llámase *sección* de un cilindro la intersección del cilindro con un plano.

Proposición XX. Teorema

574. *La sección de un cilindro determinada por un plano que contiene una generatriz es un paralelogramo.*





Sean *AC* un cilindro, y *ABCD* una sección determinada por un plano que contiene la generatriz *AB*.

Demostrar que ABCD es un paralelogramo.

Demostración. Por D trácese en el plano de sección $ABCD$ una recta paralela a AB.

Esta recta es una generatriz del cilindro, N.º 570

y puesto que está en el plano y en la superficie cilíndrica, es la intersección de ésta y aquél, y debe coincidir con DC.

Luego DC es una recta $\parallel$ a AB.

AD es una recta $\parallel$ a BC. N.º 453

$\therefore$ $ABCD$ es un paralelogramo (n.º 118). L. C. D. D.

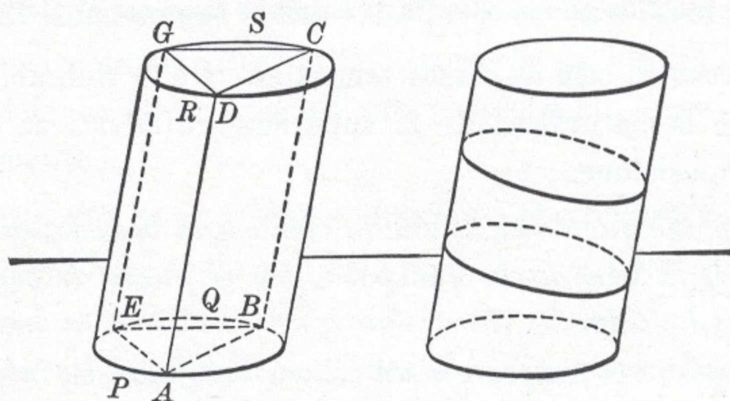
575. Corolario. *Toda sección de un cilindro recto hecha según una generatriz es un rectángulo.*

576. Cilindro circular. Llámase *cilindro circular* todo cilindro cuyas bases son círculos.

El cilindro circular recto, engendrado por la revolución de un rectángulo alrededor de uno de sus lados, se llama *cilindro de revolución.*

Proposición XXI. Teorema

577. *Las bases de un cilindro son iguales.*



Sean *PQ*, *RS* las bases de un cilindro *PS*.

Demostrar que PQ *es igual a* RS.

Demostración. Sean AD, BC, EG tres generatrices cualesquiera. Trácense AB, AE, EB, DC, DG, GC.

AD, BC, EG son iguales (n.º 571) y paralelas; N.º 569

$\therefore AB = DC$, $AE = DG$, $EB = GC$ (n.º 130), y $\triangle ABE = \triangle DCG$. N.º 80

Colóquese la base inferior sobre la superior de suerte que AE caiga sobre DG. El punto B coincidirá con C.

De igual modo se demuestra que todos los demás puntos de PQ coincidirán con puntos correspondientes de RS.

Luego $PQ = RS$. L. C. D. D.

578. Corolario 1.º *Dos secciones paralelas de un cilindro hechas por planos que cortan todas las generatrices son iguales.*

579. Corolario 2.º *Todas las secciones de un cilindro paralelas a las bases son iguales a las bases.*

580. Corolario 3.º *La recta que pasa por los centros de las bases de un cilindro circular pasa por los de las secciones paralelas a ellas.*

581. Plano tangente. Llámase *plano tangente* a un cilindro todo plano que contiene una generatriz pero no corta la superficie del cilindro.

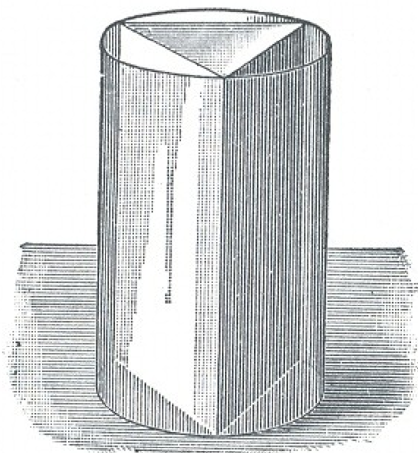
Se dice también que el cilindro es entonces tangente al plano.

582. Construcción de planos tangentes. De la definición anterior y de la naturaleza de la superficie cilíndrica se deducen estas proposiciones:

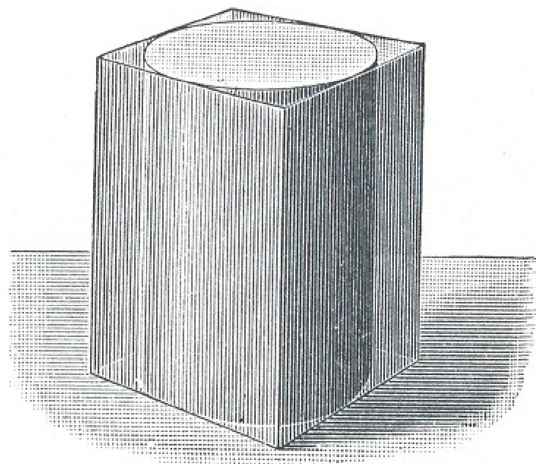
Todo plano que contiene una tangente a la base de un cilindro circular y la generatriz que pasa por el punto de contacto es tangente al cilindro.

Si un plano es tangente a un cilindro circular, su intersección con el plano de la base es tangente a la base.

583. Prisma inscrito en un cilindro. Dícese que un prisma está *inscrito en un cilindro* cuando sus aristas coinciden con generatrices del cilindro y sus bases están inscritas en las del cilindro. Dícese entonces también que el cilindro está *circunscrito al prisma.*



Prisma inscrito



Prisma circunscrito

584. Prisma circunscrito a un cilindro. Dícese que un prisma está *circunscrito a un cilindro* cuando sus caras son tangentes al cilindro y sus bases están circunscritas a las del cilindro El cilindro está entonces *inscrito en el prisma.*

585. Sección recta. Llámase *sección recta* de un cilindro la determinada por un plano que corta todas las generatrices y es perpendicular a ellas.

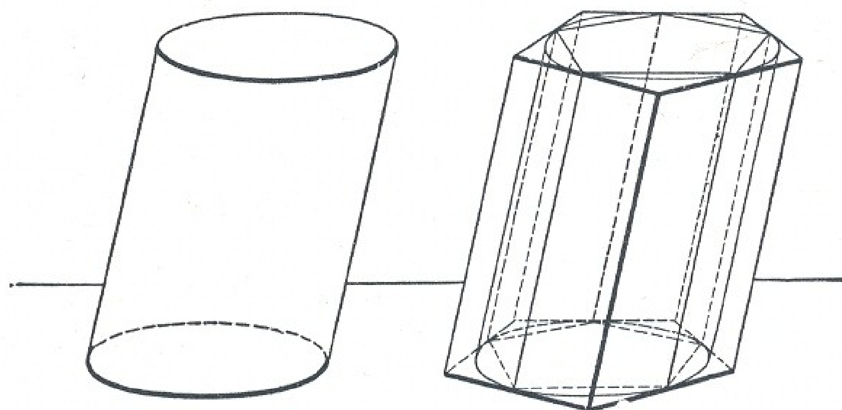
586. El cilindro como límite. Las proposiciones siguientes son consecuencias inmediatas de la naturaleza de los límites y de las definiciones de prisma inscrito y prisma circunscrito dadas anteriormente:

Si se inscribe en un cilindro circular o se circunscribe a él un prisma cuya base es un polígono regular, y el número de caras del prisma se aumenta indefinidamente, el volumen y el área lateral del prisma y el perímetro de la sección recta varían de modo que:

1.° *El volumen del cilindro es el límite del volumen del prisma.*

2.° *El área lateral del cilindro es el límite del área lateral del prisma.*

3.° *El perímetro de la sección recta del cilindro es el límite del perímetro de la sección recta del prisma.*

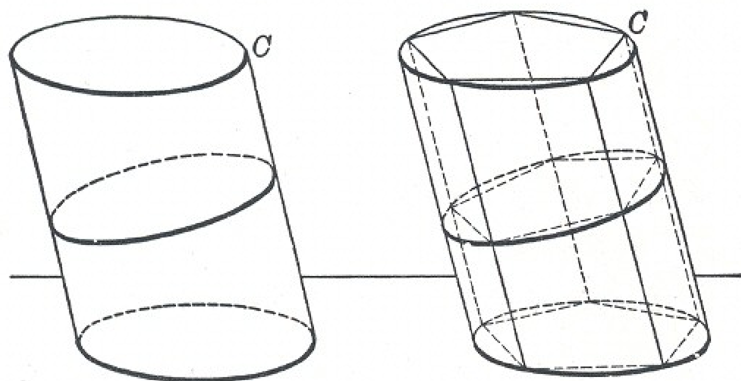


A medida que se aumenta el número de lados de la base del prisma inscrito o circunscrito, el perímetro de la base tiende sin cesar hacia la circunferencia (n.° 381).

Esto hace que la superficie lateral del prisma se aproxime más y más a la del cilindro, y que el volumen del prisma se aproxime más y más al del cilindro. Esta aproximación creciente es enteramente análoga a la de los polígonos regulares con respecto al círculo.

Proposición XXII. Teorema

587. *El área lateral de un cilindro circular es igual al producto de la generatriz por el perímetro de la sección recta.*



Sean *C* un cilindro circular, *L* su área lateral, *l* la generatriz, y *p* el perímetro de la sección recta.

Demostrar que $L = pl.$

Demostración. Supóngase inscrito en C un prisma cuya base es un polígono regular. Sean L' su área lateral y p' el perímetro de su sección recta.

Se tiene: $L' = p'l.$ N.º 512

Cuando se aumenta indefinidamente el número de caras,

L' tiende hacia el límite L,

p' tiende hacia el límite p; N.º 586

y por tanto $p'l$ tiende hacia el límite pl.

$\therefore L = pl$ (n.º 207). L.C.D.D.

588. Corolario. *El área lateral de un cilindro de revolución es igual al producto de la altura del cilindro por la circunferencia de la base.*

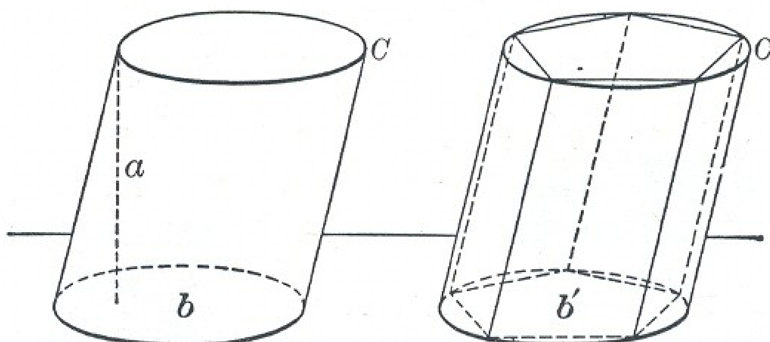
Sean h la altura, r el radio, y A el área total de un cilindro de revolución. Entonces,

$$L = 2\pi rh. \quad A = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r).$$



Proposición XXIII. Teorema

589. *El volumen de un cilindro circular es igual al producto de la base por la altura.*



Sea *C* un cilindro circular de base *b*, altura *h* y volumen *V*.

Demostrar que $V = bh$.

Demostración. Supóngase inscrito en C un prisma de base regular b' y volumen V'.

$V' = b'h$. N.° 539

Cuando se aumenta indefinidamente el número de caras,

V' tiende hacia V, N.° 586

b' tiende hacia b. N.° 381

Ahora bien, V' es siempre igual a $b'h$; N.° 539

por tanto, $b'h$ tiende hacia bh.

$\therefore V = bh$ (n.° 207). L.C.D.D.

590. Corolario. *El volumen de un cilindro de revolución de radio* r *y altura* h *es* $\pi r^2 h$.

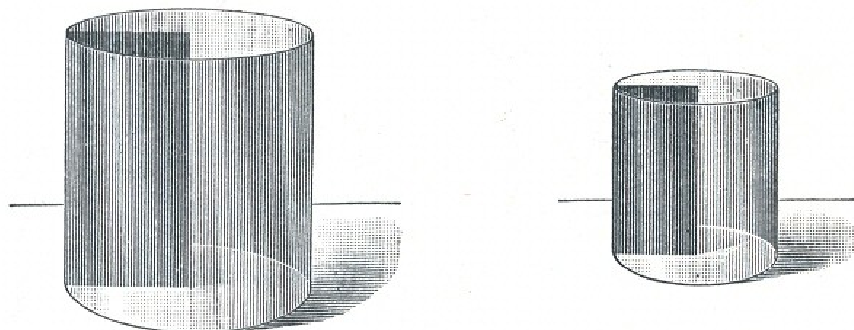
¿Cuál es el área de la base? ¿Por qué factor debe multiplicarse?

591. Cilindros semejantes. Llámanse *cilindros de revolución semejantes* los cilindros engendrados por la revolución de rectángulos semejantes alrededor de lados homólogos.

Los n.os 591 y 592 pueden saltarse si se quiere, lo que no afectará el estudio de lo que sigue.

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA

592. *Las áreas, sean laterales o totales, de dos cilindros de revolución semejantes son entre sí como los cuadrados de las alturas o de los radios; y los volúmenes, como los cubos de las alturas o de los radios.*



Sean r y r', h y h', L y L', A y A', V y V' respectivamente los radios, las alturas, las áreas laterales, las totales y los volúmenes de dos cilindros de revolución semejantes.

Demostrar que $L : L' = A : A' = \mathrm{h}^2 : \mathrm{h}'^2 = \mathrm{r}^2 : \mathrm{r}'^2$

y que también $V : V' = \mathrm{h}^3 : \mathrm{h}'^3 = \mathrm{r}^3 : \mathrm{r}'^3$.

Demostración. Los rectángulos generadores son semejantes. N.° 591

$$\therefore \frac{h}{h'} = \frac{r}{r'} = \frac{h + r}{h' + r'}. \qquad \text{N.° 269}$$

De esta proporción y del principio del n.° 588 se deduce:

$$\frac{L}{L'} = \frac{2\,\pi r h}{2\,\pi r' h'} = \frac{r}{r'} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2}.$$

También, $A = 2\,\pi r h + 2\,\pi r^2$ (n.° 588), y $V = \pi r^2 h$. N.° 590

$$\therefore \frac{A}{A'} = \frac{2\,\pi r(h + r)}{2\,\pi r'(h' + r')} = \frac{r}{r'} \times \frac{h + r}{h' + r'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{h^2}{h'^2},$$

y asímismo, $\dfrac{V}{V'} = \dfrac{\pi r^2 h}{\pi r'^2 h'} = \dfrac{r^2}{r'^2} \times \dfrac{h}{h'} = \dfrac{r^3}{r'^3} = \dfrac{h^3}{h'^3}.$ L.C.D.D

EJERCICIO 93

1. El diámetro de un pozo cilíndrico es de 1,8 m., y el agua tiene 2,1 m. de profundidad. ¿Cuántos litros de agua hay entonces en el pozo?

2. Al sumergir un cuerpo en el agua contenida en un cilindro circular de 60 cm. de diámetro, el nivel del agua sube 40 cm. ¿Cuál es el volumen del cuerpo?

3. ¿Cuántos metros cúbicos de tierra hay que extraer para construír un túnel de 100 m. de largo cuya sección es un semicírculo de 12 m. de diámetro?

4. ¿Cuántos centímetros cuadrados de hierro laminado se necesitan para hacer un tubo de 18 cm. de diámetro y 4,8 m. de longitud?

5. Hállese el radio de una vasija cilíndrica de 20 cm. de profundidad que contenga 2 litros.

6. La profundidad de una vasija cilíndrica de 20 litros de capacidad es igual al diámetro. Hállese el diámetro.

7. Si el área total de un cilindro de revolución es A, y el radio es r, ¿cómo se expresa la altura?

8. Exprésense el radio r y la altura h de un cilindro de revolución en función del área lateral L y el volumen V.

9. Exprésese el volumen V de un cilindro de revolución en función de la circunferencia C de la base y de la altura h del cilindro.

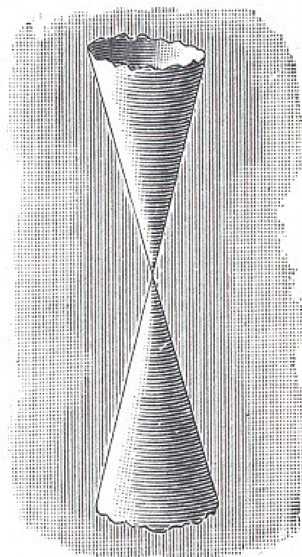
10. Hállese V en función de C y A.

11. Hállese A en función de V y h.

12. Si V es el volumen de un cilindro de revolución de altura igual al diámetro, ¿cómo se expresan la altura h y el área total A?

13. Despéjese r en la fórmula $A = 2\pi r(h + r)$ (n.° 588) (Suprímase si no se han estudiado las ecuaciones del segundo grado.)

593. Superficie cónica. Llámase *superficie cónica* toda superficie engendrada por una recta que se mueve de tal modo que siempre corta una curva plana fija y pasa por un punto exterior al plano de esa curva.



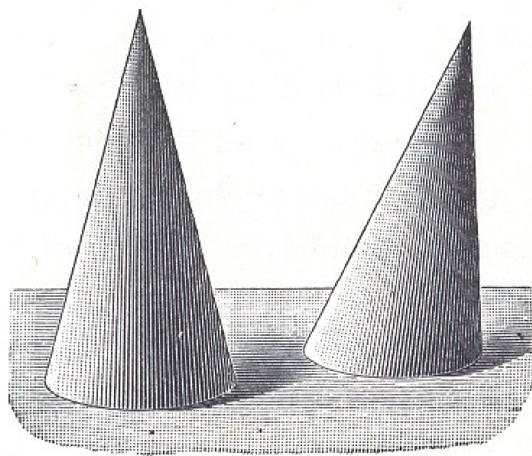
La curva fija se llama *directriz*; el punto fijo, *vértice*.

Si se coge un lápiz por un extremo y, sin cambiar la posición de ese extremo, se desliza el otro a lo largo de una circunferencia, el eje del lápiz describirá una superficie cónica. O cójase una varilla por cualquier punto y, sin cambiar la posición de éste, hágase que uno de los extremos recorra una curva plana cualquiera. Se tendrá entonces la superficie cónica representada en esta figura.

594. Generatriz. Llámase *generatriz* de una superficie cónica la recta que engendra la superficie, y también toda recta que representa una de las posiciones por que pasa aquélla; esto es, toda recta que va del vértice a la directriz.

Si la generatriz es de longitud indefinida, la superficie consta de dos partes, como se ve en la figura anterior. Estas partes se llaman *hojas*.

595. Cono. Llámase *cono* todo sólido limitado por una superficie cónica y por un plano que corta todas las generatrices.



La superficie cónica se llama *superficie lateral* del cono, y su vértice, *vértice* del cono.

La *base* del cono es la superficie plana.

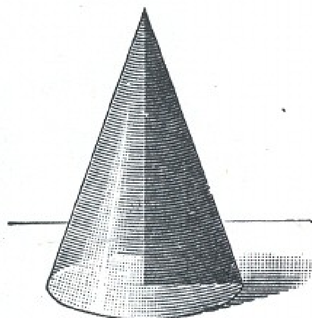
Las *generatrices* del cono son las de la superficie cónica que lo limita.

La *altura* de un cono es la longitud de la perpendicular del vértice al plano de la base; o sea, la distancia del vértice a la base.

596. Cono circular. Llámase *cono circular* el que tiene un círculo por base.

Llámase *eje* de un cono circular la recta que va del vértice al centro de la base.

597. Conos recto y oblicuo. Llámase *cono recto* el circular cuyo eje es perpendicular al plano de la base; *cono oblicuo*, el que no es recto.



598. Cono de revolución. Llámase *cono de revolución* el circular recto, que puede suponerse engendrado por la rotación de la hipotenusa de un triángulo rectángulo sobre un cateto.

La hipotenusa generatriz se llama *lado* del cono. Si se supone prolongada indefinidamente, la superficie que engendra es una *superficie cónica de revolución.*

599. Sección cónica. Llámase *sección cónica* la intersección de un plano cualquiera y una superficie cónica de revolución.

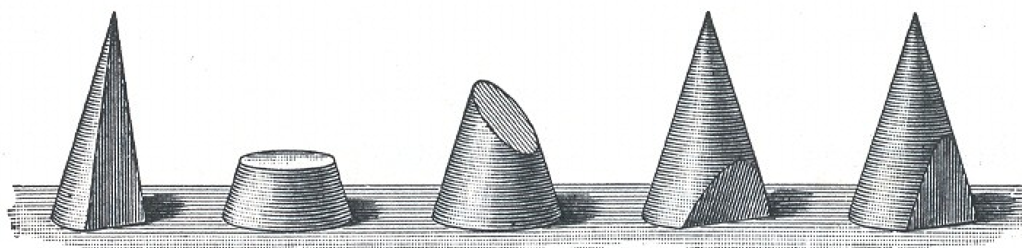


FIG. 1 FIG. 2 FIG. 3 FIG. 4 FIG. 5

En la fig. 1 la sección cónica consta de dos rectas concurrentes. Este caso se discute en el n.° 600.

En la fig. 2 la sección es un círculo. El caso se discute en el n.° 601.

En la fig. 3 la sección es una *elipse*, forma que aparenta un círculo mirado oblicuamente. Es la forma de las órbitas planetarias.

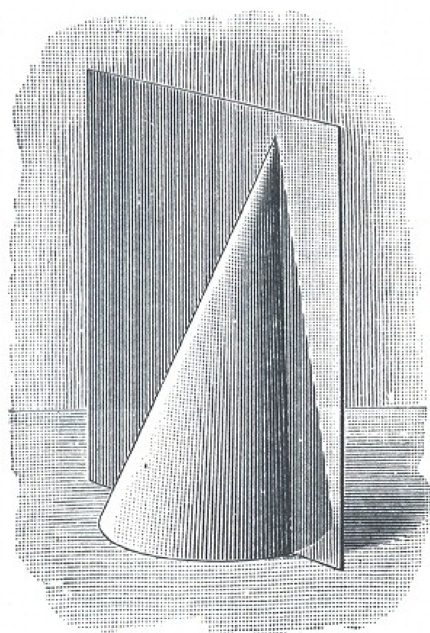
En la fig. 4 la sección es una *parábola*, trayectoria teórica de un proyectil. El plano de sección es paralelo a una generatriz.

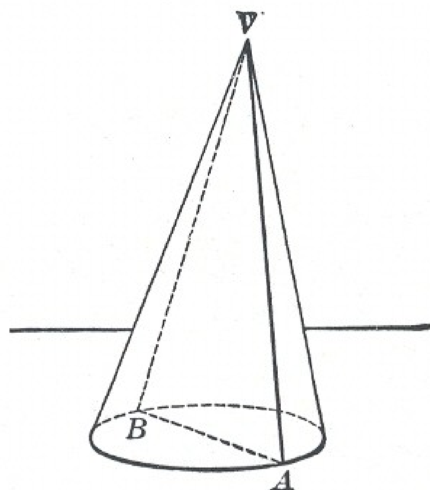
En la fig. 5 la sección es una *hipérbola.*

La geometría elemental no se ocupa de estas tres últimas curvas.

PROPOSICIÓN XXV. TEOREMA

600. *Toda sección de un cono determinada por un plano que pasa por el vértice es un triángulo.*





Sea *AVB* una sección determinada por un plano que pasa por el vértice *V* de un cono.

Demostrar que *AVB es un triángulo.*

Demostración. *AB* es una recta. N.° 429

Trácense las rectas *VA*, *VB*.

VA y *VB* son generatrices. N.° 594

Estas rectas están en el plano de sección, puesto que sus extremos lo están. N.° 422

Luego *VA* y *VB* son las intersecciones del plano con la superficie del cono.

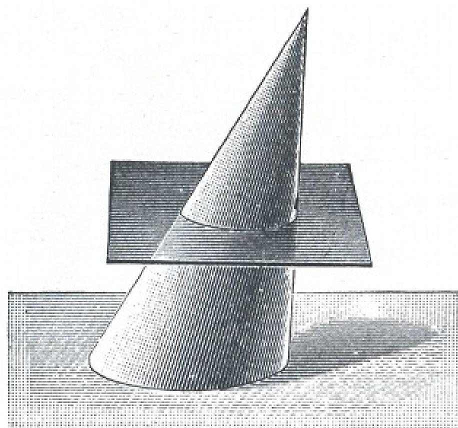
Ahora bien, *VA* y *VB* son rectas. Por constr.

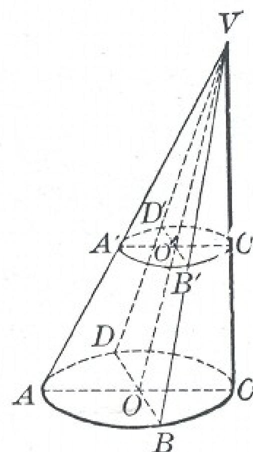
Luego el plano de sección corta la superficie cónica según dos rectas.

Luego la sección *AVB* es un triángulo (n.° 28). L.C.D.D.

Proposición XXVI. Teorema

601. *Toda sección paralela a la base de un cono circular es un círculo.*





Sean *V-ABCD* un cono circular, y *A'B'C'D'* una sección paralela á la base.

Demostrar que $A'B'C'D'$ *es un círculo.*

Demostración. Sean O el centro de la base, y O' el punto en que el eje encuentra la sección.

Por VO y dos generatrices cualesquiera VA, VB, trácense planos, que cortarán la base en los radios OA y OB, y $A'B'C'D'$ en las rectas $O'A'$, $O'B'$.

$O'A'$ es $\parallel$ a OA, y $O'B'$ a OB. N.º 453

Por tanto, el triángulo AOV es semejante al $A'O'V$, y el OBV es semejante al $O'B'V$. N.º 285

$$\therefore \frac{OA}{O'A'} = \frac{VO}{VO'} = \frac{OB}{O'B'}.$$ N.º 282

Ahora bien, $OA = OB$; N.º 162

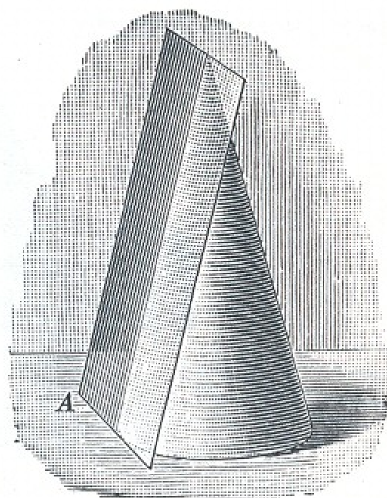
$\therefore O'A' = O'B'$, N.º 263

y $A'B'C'D'$ es un círculo (n.º 159). L C.D.D.

602. Corolario. *El eje de todo cono circular pasa por el centro de toda sección paralela a la base.*

603. Plano tangente. Llámase *plano tangente* a un cono todo plano que contiene una generatriz pero no corta la superficie del cono.

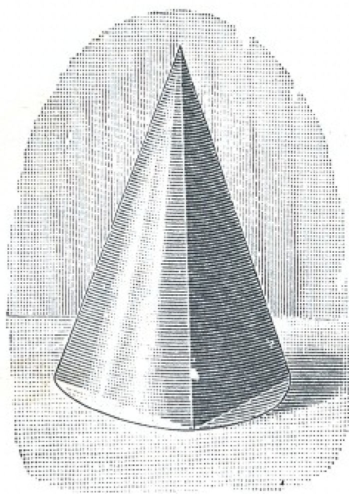
604. Construcción de planos tangentes. Es evidente que en un cono circular cualquiera,



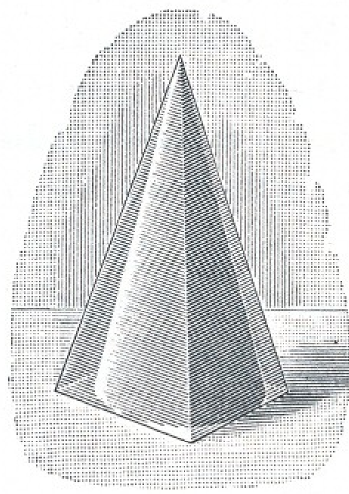
Todo plano que contiene una tangente a la base y la generatriz que pasa por el punto de contacto es tangente al cono;

Todo plano tangente corta el de la base según una tangente a la base.

605. Pirámide inscrita en un cono. Dícese que una pirámide está *inscrita* en un cono cuando sus aristas laterales son generatrices del cono y su base está inscrita en la del cono. Dícese también que el cono está entonces *circunscrito* a la pirámide.



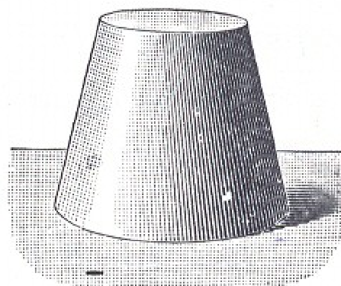
Pirámide inscrita



Pirámide circunscrita

606. Pirámide circunscrita a un cono. Una pirámide está *circunscrita* a un cono cuando sus caras son tangentes al cono y su base está circunscrita a la del cono. El cono está entonces *inscrito* en la pirámide.

607. Cono truncado o tronco de cono. Llámase *cono truncado* o *tronco de cono* la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a la base.



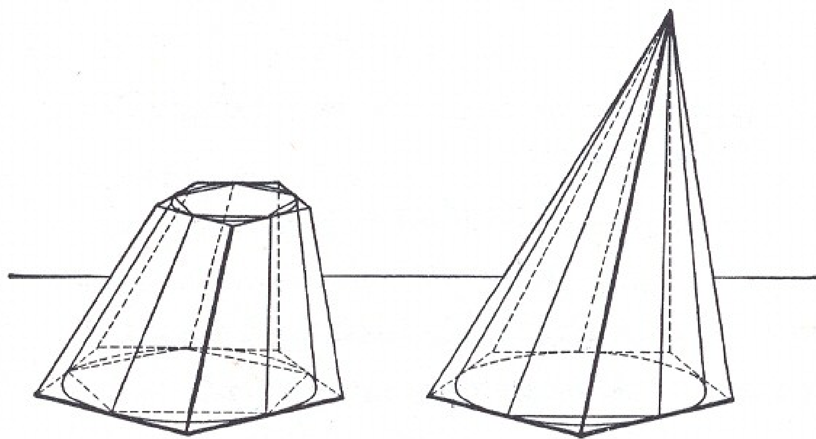
La sección y la base del cono se llaman *bases* del tronco.

Los términos *altura* y *área lateral* de un tronco de cono tienen significados análogos a los dados en los n.os 550 y 551 con respecto al tronco de pirámide.

El *lado* de un tronco de cono de revolución es el segmento que las bases interceptan en el lado del cono.

608. El cono y el tronco de cono como límites. Las proposiciones siguientes, semejantes a las del n.º 586, pueden admitirse sin demostración especial:

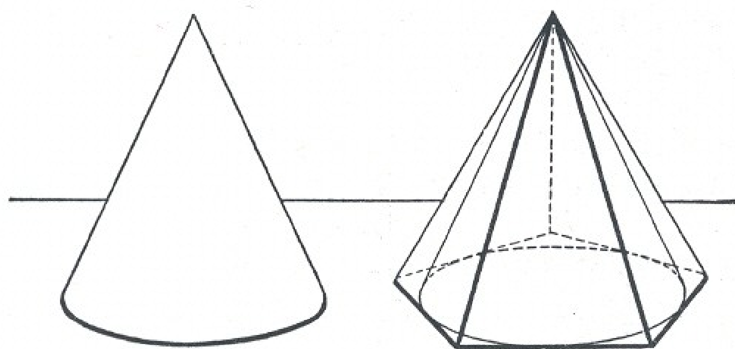
Si se inscribe en un cono circular o se circunscribe a él una pirámide de base regular, y se aumenta indefinidamente el número de sus caras, el volumen y el área lateral de la pirámide tenderán respectivamente hacia el volumen y el área lateral del cono como límites;



El volumen de un tronco de cono es el límite de los volúmenes de los troncos de las pirámides inscrita y circunscrita de bases regulares, cuando el número de caras aumenta indefinidamente; y el área lateral del tronco de cono es el límite de las áreas laterales de los troncos de esas pirámides.

PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA

609. *El área lateral de un cono de revolución es igual a la mitad del producto del lado del cono por la circunferencia de la base.*



Sean L el área lateral, l el lado y C la circunferencia de la base de un cono de revolución.

Demostrar que $L = \frac{1}{2} Cl.$

Demostración. Supóngase circunscrita al cono una pirámide regular. Sean p el perímetro de su base y L' su área lateral.

$L' = \frac{1}{2} pl.$ N.º 553

Cuando el número de caras de la pirámide circunscrita se aumenta indefinidamente,

L' tiende hacia L, N.º 608

p tiende hacia C, N.º 381

y por tanto $\frac{1}{2} pl$ tiende hacia $\frac{1}{2} Cl$.

Ahora bien, L' es siempre igual a $\frac{1}{2} pl$. N.º 553

$\therefore L = \frac{1}{2} Cl$ (n.º 207). L.C.D.D.

610. COROLARIO. *Si* L *es el área lateral,* A *la total,* l *el lado y* r *el radio de la base de un cono de revolución, se tendrá:*

$$L = \tfrac{1}{2}(2\,\pi r \times l) = \pi r l,$$

$$A = \pi r l + \pi r^2 = \pi r(l + r).$$

EJERCICIO 94

Hállense las áreas laterales de los conos de revolución en que el lado y la circunferencia de la base tienen los siguientes valores respectivamente:

1. 2,875 y 5,375 m.
2. 4,375 y 8,25 m.
3. 6,5 y 10,5 m.
4. 3,7 y 5,8 m.
5. 5,5 y 9,7 m.
6. 6,5 y 11,6 m.
7. 2,5 y 4,8 cm.
8. 3,8 y 8,5 cm.
9. 5,9 y 12,3 cm.

Hállense las áreas laterales de los conos de revolución en que el lado del cono y el radio de la base tienen los siguientes valores respectivamente:

10. 3,75 y 2,5 cm.
11. 2,5 y 1,75 m.
12. 4,875 y 3,25 m.
13. 6,4 y 4,8 m.
14. 7,2 y 5,3 m.
15. 8,9 y 5,6 m.
16. 2,25 y 8 cm.
17. 4,5 y 2 cm.
18. 6,75 y 3 m.

Hállense las áreas totales de los conos de revolución en que el lado del cono y el radio de la base tienen los siguientes valores respectivamente:

19. 3 y 2 m.
20. 5 y 3 cm.
21. 7 y 4 cm.
22. 9 y 5 cm.
23. 6 y 4 m.
24. 12 y 5 cm.

25. Establézcase una fórmula para calcular el área lateral de un cono de revolución en función de la altura y el radio.

26. Establézcase una fórmula para calcular el lado en función del área lateral y la circunferencia de la base.

27. Exprésese el lado en función del área lateral y el radio.

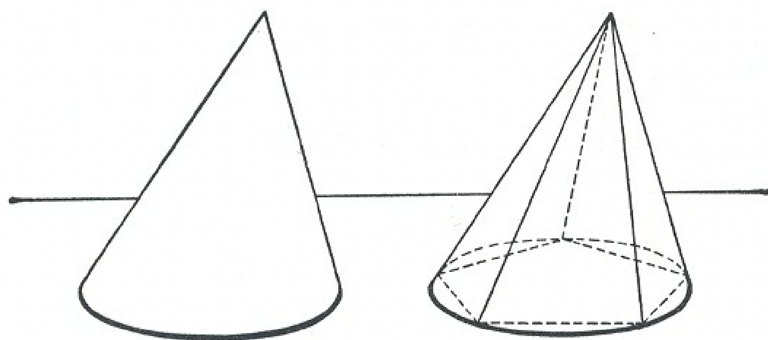
28. Exprésese el radio de la base en función del área lateral y el lado.

29. Exprésese el lado en función del radio de la base y el área total del cono.

30. Exprésese la circunferencia de la base en función del área lateral y el lado del cono.

PROPOSICIÓN XXVIII. TEOREMA

611. *El volumen de un cono circular es igual a un tercio del producto de la base por la altura.*



Sea V el volumen de un cono circular de base b y altura h.

Demostrar que $V = \frac{1}{3}$ bh.

Demostración. Supóngase inscrita en el cono una pirámide de base regular b' y volumen V'.

$V' = \frac{1}{3} b'h.$ N.° 561

Si el número de caras de la pirámide se aumenta indefinidamente,

V' tiende hacia V, N.° 608

b' tiende hacia b, N.° 381

y por tanto $b'h$ tiende hacia bh.

$\therefore V = \frac{1}{3} bh$ (n.° 207). **L. C. D. D.**

612. CorolARIO. *En todo cono circular de radio* r *y altura* h

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$

Obtiénese esta fórmula reemplazando en la anterior b por πr^2 (n.° 389)

613. Conos de revolución semejantes. Llámanse *conos de revolución semejantes* los engendrados por la revolución de triángulos rectángulos semejantes sobre catetos homólogos.

EJERCICIO 95

Hállense los volúmenes de los conos circulares en que la altura y el área de la base son respectivamente:

1. 4 cm., 8 cm.^{2}

2. 3,25 m., 9,375 m.^{2}

3. 5,375 m., 10,5 m.^{2}

4. 6,3 cm., 3,8 cm.^{2}

5. 7,8 cm., 6,9 cm.^{2}

6. 9,3 mm., 16,8 mm.^{2}

Hállense los volúmenes de los conos circulares en que la altura y el radio son respectivamente:

7. 4 y 3 cm.

8. 6 y 4 cm.

9. 8 y 5 cm.

10. 9,8 y 4,3 m.

11. 10,5 y 6,2 m.

12. 14,9 y 9,6 cm.

13. ¿Cuál es la capacidad de un toldo cónico de 3 m. de diámetro y 2,1 m. de alto?

14. ¿Cuántos metros cúbicos hay en un montón de tierra que tiene la forma de un cono circular de 8 m. de altura y 15 de diámetro?

15. Exprésese por una fórmula la altura de un cono circular en función del área de la base y el volumen.

16. Exprésese el área de la base de un cono circular en función del volumen y la altura.

17. Exprésese la altura de un cono circular en función del volumen y el radio.

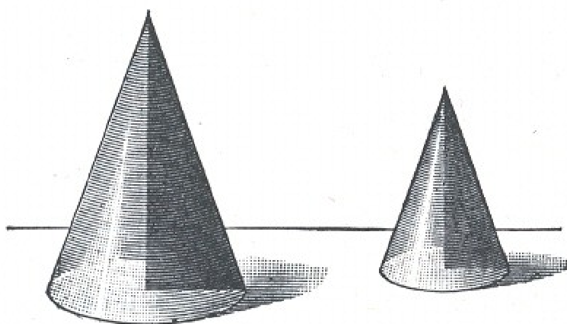
18. Exprésese el radio de un cono circular en función del volumen y la altura.

19. Exprésese el volumen de un cono de revolución en función: 1) del lado del cono y el radio de la base; 2) del lado del cono y el diámetro de la base, dando al radical forma entera.

20. Exprésense el lado y la altura de un cono de revolución en función del volumen del cono y el diámetro de la base.

Proposición XXIX. Teorema

614. *Las áreas, sean laterales o totales, de dos conos de revolución semejantes son entre sí como los cuadrados de las alturas, de los radios o de los lados, y los volúmenes son entre sí como los cubos de las mismas líneas homólogas.*



Sean respectivamente L y L' las áreas laterales, A y A' las totales, V y V' los volúmenes, h y h' las alturas, l y l' los lados, y r y r' los radios de dos conos de revolución semejantes.

Demostrar que $L:L' = A:A' = \mathrm{h}^2:\mathrm{h}'^2 = \mathrm{r}^2:\mathrm{r}'^2 = \mathrm{l}^2:\mathrm{l}'^2$,

y que también $V:V' = \mathrm{h}^3:\mathrm{h}'^3 = \mathrm{r}^3:\mathrm{r}'^3 = \mathrm{l}^3:\mathrm{l}'^3$.

Demostración. Se tiene:

$$\frac{h}{h'} = \frac{l}{l'} = \frac{r}{r'} = \frac{l+r}{l'+r'}, \qquad \text{N.}^{\text{os}}\ 282,\ 269$$

$$\frac{L}{L'} = \frac{\pi r l}{\pi r' l'} = \frac{r}{r'} \times \frac{l}{l'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{l^2}{l'^2} = \frac{h^2}{h'^2}, \qquad \text{N.}^{\circ}\ 610$$

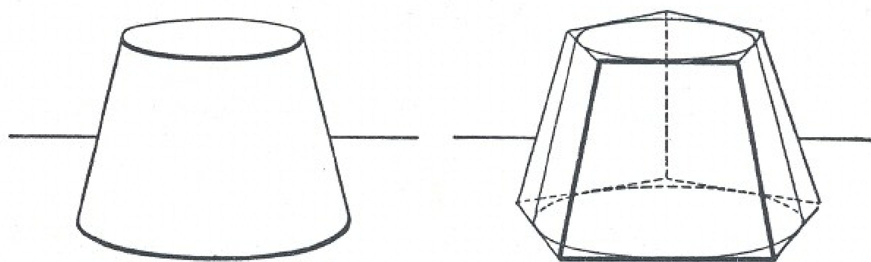
$$\frac{A}{A'} = \frac{\pi r(l+r)}{\pi r'(l'+r')} = \frac{r}{r'} \times \frac{l+r}{l'+r'} = \frac{r^2}{r'^2} = \frac{l^2}{l'^2} = \frac{h^2}{h'^2}, \qquad \text{N.}^{\circ}\ 610$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi r'^2 h'} = \frac{r^2}{r'^2} \times \frac{h}{h'} = \frac{r^3}{r'^3} = \frac{h^3}{h'^3} = \frac{l^3}{l'^3}\ (\text{n.}^{\circ}\ 612). \qquad \text{L.C.D.D.}$$

Los n.ºs 613 y 614 pueden saltarse si se quiere, sin que ello afecte el estudio de los teoremas ni la resolución de los problemas que se dan en el resto de la obra.

PROPOSICIÓN XXX. TEOREMA

615. *El área lateral de un tronco de cono de revolución es igual al producto del lado por la semisuma de las circunferencias de las bases.*



Sean L el área lateral de un tronco de cono de revolución, l el lado, y C y C' las circunferencias de las bases.

Demostrar que $L = \frac{1}{2}(C + C')\,l.$

Demostración. Supóngase circunscrito al tronco de cono un tronco de pirámide regular.

Sean L' el área lateral y p y p' los perímetros de las bases del tronco de pirámide. El apotema es igual al lado l del tronco de cono. Esto supuesto, se tendrá:

$$L' = \frac{1}{2}(p + p')\,l. \qquad \text{N.° 554}$$

¿Hacia qué límites tienden las cantidades variables L' y $(p + p')$ cuando el número de caras del tronco de pirámide aumenta indefinidamente?

¿Cuál es pues el límite de $\frac{1}{2}(p + p')\,l$?

¿Qué se deduce de aquí? (Véase el n.° 587.)

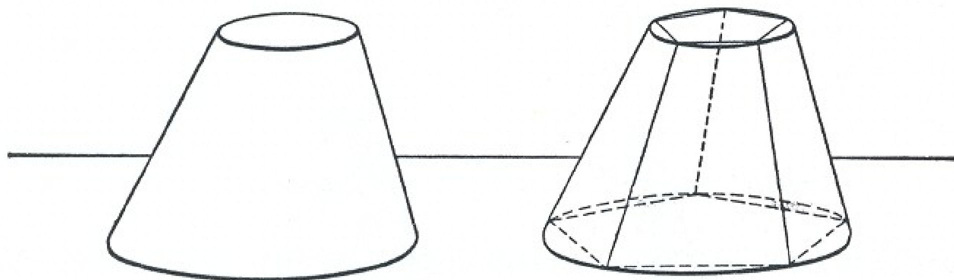
Complétese la demostración.

616. CorolarIO. *El área lateral de un tronco de cono de revolución es igual al producto del lado por la circunferencia de la sección equidistante de las bases.*

¿Cómo se demuestra que la circunferencia de esta sección es igual a $\frac{1}{2}(C + C')$? ¿Qué relación hay entre los radios?

PROPOSICIÓN XXXI. TEOREMA

617. *Todo tronco de cono circular es equivalente a la suma de tres conos cuya altura común es la del tronco y cuyas bases son respectivamente las del tronco y la media proporcional entre ellas.*



Sean b y b' las bases, h la altura, y V el volumen de un tronco de cono circular.

Demostrar que $V = \frac{1}{3}\mathrm{h}(\mathrm{b} + \mathrm{b}' + \sqrt{\mathrm{bb}'})$.

Demostración. Supóngase inscrito en el tronco de cono un tronco de pirámide cuyas bases sean polígonos regulares.

Sean V' el volumen del tronco de pirámide, y x y x' las bases. La altura es igual a la altura h del tronco de cono dado. Esto supuesto, se tiene:

$$V' = \frac{1}{3} h (x + x' + \sqrt{xx'}). \qquad \text{N.° 565}$$

¿ Hacia qué límites tienden V', x, x' y xx' cuando el número de caras se aumenta indefinidamente ?

¿ Hacia qué límite tiende $\frac{1}{3} h (x + x' + \sqrt{xx'})$?

¿ Qué se deduce de esto ?

Dése la demostración completa.

618. CoROLARIO. *En todo tronco de cono de revolución los radios de cuyas bases son* r *y* r',

$$V = \frac{1}{3}\pi \mathrm{h}(\mathrm{r}^2 + \mathrm{r}'^2 + \mathrm{rr}').$$

Síguese esto de que $b = \pi r^2$, $b' = \pi r'^2$, $\sqrt{bb'} = \sqrt{\pi r^2 \cdot \pi r'^2} = \pi r r'$.

EJERCICIO 96

Hállense las áreas laterales de los troncos de cono de revolución en que C, C′ *y* l *tienen los valores en metros que se dan a continuación:*

1. $C = 4$, $C' = 3$, $l = 0{,}5$.

2. $C = 6$, $C' = 5$, $l = 1{,}4$.

3. $C = 7{,}5$, $C' = 5{,}75$, $l = 2{,}125$.

4. $C = 23$, $C' = 18$, $l = 16$.

Hállense los volúmenes de los conos truncados circulares en que h, b *y* b′ *tienen los valores siguientes:*

5. $h = 3$ m., $b = 4{,}5$ m.^{2}, $b' = 2$ m.^{2}

6. $h = 4$ m., $b = 8{,}3$ m.^{2}, $b' = 3$ m.^{2}

7. $h = 5{,}5$ m., $b = 16$ m.^{2}, $b' = 9$ m.^{2}

8. $h = 6$ m., $b = 17$ m.^{2}, $b' = 11$ m.^{2}

Hállense los volúmenes de los troncos de cono de revolución en que h, r *y* r′ *tienen los siguientes valores en centímetros:*

9. $h = 4$, $r = 3$, $r' = 2$.

10. $h = 5$, $r = 3{,}5$, $r' = 2{,}25$.

11. $h = 6$, $r = 3{,}7$, $r' = 3{,}1$

12. $h = 7{,}5$, $r = 4{,}75$, $r' = 3{,}1$.

13. Establézcase una fórmula para determinar la altura de un cono truncado circular en función del volumen y de las áreas de las bases.

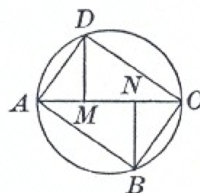
14. Establézcase una fórmula para determinar la altura de un cono truncado de revolución en función del volumen y de los radios de las bases.

15. Establézcase una fórmula para determinar el volumen V de un tronco de cono de revolución en función de la altura h del tronco y los diámetros d y d' de las bases.

EJERCICIO 97

Problemas industriales

1. Para obtener de una troza redonda la viga rectangular de mayor resistencia se emplea esta regla:



De lados opuestos de un diámetro AC, levántense a él dos perpendiculares MD, NB en los puntos de trisección M y N. El rectángulo $ABCD$ es la sección de la viga que se busca.

Calcúlense las dimensiones, suponiendo que la troza tiene 48 cm. de diámetro.

2. La chimenea de un buque tiene 1,275 m. de diámetro, y está hecha de cuatro placas metálicas unidas longitudinalmente. En las juntas, cada placa cubre 38 mm. de la otra. Hállese el ancho de las placas.

3. Una caldera tubular tiene 124 tubos de 5 cm. de diámetro y 3 m. de longitud. ¿Cuál es la superficie total de los tubos?

4. Un cuarto está calentado por tuberías de vapor, que constan de 70 m. de tubos de 5 cm. de diámetro, 8 m. de tubos de 8 cm., y 1 m. de tubos de 10 cm. ¿Cuál es la superficie total de calefacción?

5. Suponiendo que el hierro pesa 8 veces más que el agua, ¿cuál es el peso de una plancha triangular de hierro de 3000 cm.^{2} de superficie y 5 mm. de espesor?

6. En una caldera cilíndrica vertical, la superficie del agua se halla a 1 m. de la tapa superior, y tiene área de 1,2 m.^{2} ¿Qué volumen ocupa el vapor?

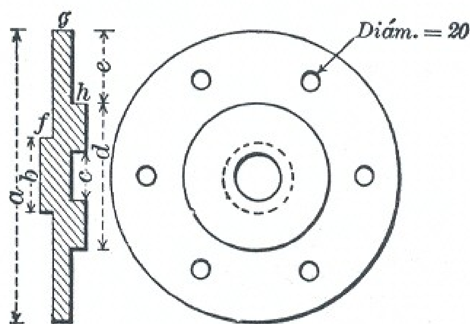
7. ¿Cuál debe ser la altura de un cilindro de 1,2 m. de diámetro que contenga 4500 litros?

8. ¿Cuántos centímetros cuadrados de lata se necesitan para un embudo cuyos diámetros superior e inferior son de 30 y 15 cm. respectivamente y cuya altura es de 25 cm.?

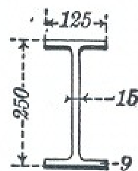
9. Suponiendo el peso del acero igual a 8 veces el del agua, ¿cuánto pesa una barra de acero cuyas dimensiones son 3 m., 250 mm. y 45 mm.?

10. En una plancha de acero cuyas dimensiones son 1,5 m., 1,05 m. y 12 mm. se hace un agujero circular de 25 cm. de diámetro. ¿Cuál es el peso de lo que queda, si el acero tiene el peso dado en el problema anterior?

11. Una columna tiene un pedestal de fundición en forma de pirámide truncada de 22 cm. de altura. La base inferior es un cuadrado de 60 cm. por lado, y el área de la superior es un cuarto del área de la inferior. ¿Cuál es el peso del pedestal, suponiendo que el peso de la fundición es 7,2 veces el del agua?



12. La tapa (acero) de un cilindro de vapor tiene la forma de esta figura. Las dimensiones en milímetros son: $a = 300$, $b = 75$, $c = 50$, $d = 150$, $e = 75$, $f = 12{,}5$, $g = 22$, $h = 20$. Hay seis agujeros de 20 mm. de diámetro para los pernos. Calcúlese el peso, suponiendo que el acero pesa 8 veces más que el agua.



13. Una viga de doble T, como la aquí representada en sección, tiene 5,4 m. de largo. Las otras dimensiones, en milímetros, se dan en la figura. Hállese su peso, suponiendo que el material pesa 7500 kg. por m.³

14. Un árbol hueco de acero tiene 45 cm. de diámetro exterior, 20 cm. de diámetro interior, y 3,6 m. de largo. Hállese el peso, suponiendo que el acero pesa 8000 kg. por m.³

15. Hállese el área lateral de un pedestal de forma de cono truncado cuyos radios superior e inferior son de 0,85 y 1,2 m. respectivamente y cuya altura es de 3 m.

EJERCICIO 98

Problemas varios

1. Hállese el volumen de un tronco de pirámide regular cuyas bases son cuadrados de 54 y 24 cm. por lado y cuyo apotema es de 25 cm.

2. Las bases de un tronco de pirámide regular son exágonos de 1 y 2 m. por lado respectivamente. El volumen es de 12 m.^{3} Hállese la altura.

3. De un cono de revolución de 30 cm. por lado y la circunferencia de cuya base mide 10 cm. se corta por un plano paralelo a la base un cono de 6 cm. de lado. Hállense el área lateral y el volumen del tronco así obtenido, y también el volumen del cono entero.

4. En un tronco de pirámide, $h = 9$ m., y las bases son cuadrados de 6 y 8 m. por lado respectivamente. Hállese la diferencia entre su volumen y el de un prisma de igual altura y de base igual a una sección del tronco paralela a las bases y equidistante de ellas.

5. Una construcción de piedra tiene la forma de un cono truncado hueco y descubierto de 12 m. de altura. Los diámetros exteriores de las bases son de 12 y 16 m.; los interiores, de 10 y 12 m. ¿Cuántos metros cúbicos de piedra contiene?

6. Una chimenea tiene forma de pirámide regular truncada y altura de 54 m. Las bases superior e inferior son cuadrados de 3 y 4,8 m. por lado respectivamente. El conducto es de sección uniforme cuadrada de 2,1 m. por lado. ¿Cuál es el volumen del material?

7. Dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son 25 y 35 cm. giran cada uno sobre un cateto. Los otros catetos son de 15 y 21 cm. respectivamente. Hállese la relación entre las áreas totales de los sólidos que engendran, y calcúlense los dos volúmenes.

EJERCICIO 99

Sólidos equivalentes

1. Hállese la altura de un prisma recto cuya base sea un rectángulo de 12 por 16 cm. y cuyo volumen sea igual al de un cubo de 12 cm. por lado. Hállese la diferencia entre las áreas totales de los dos sólidos.

2. Las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo son a, b y c. Exprésense la altura de un cilindro de revolución equivalente de radio r, y la de un cono de revolución equivalente de radio r.

3. Dada una pirámide regular de 12 cm. de altura, hállese la altura de un prisma cuya base y volumen sean equivalentes a los de la pirámide.

4. Dado un cilindro de 7 m. de radio y 8 de altura, hállese la altura de un prisma recto equivalente de base cuadrada de 4 m. por lado.

5. Sea a la arista de un cubo. ¿Cuál es la altura del cilindro recto circular equivalente de radio r?

6. Las alturas de dos cilindros rectos circulares equivalentes están en la relación de 4 a 9. Si el diámetro del uno es de 6 m., ¿cuál es el del otro?

7. Dado un cono en que $r = 3{,}5$ m. y $h = 8$ m., hállese la altura de un cilindro equivalente de 6 m. de diámetro.

8. Las bases de un tronco de una pirámide regular de 6 cm. de altura son cuadrados de 5 y 8 cm. por lado. Hállese la altura de una pirámide regular equivalente de base cuadrada de 12 cm. por lado.

9. Un tronco de cono de revolución tiene 5 m. de altura y diámetros de 2 y 3 m. Hállese la altura de un cilindro de revolución equivalente de base equivalente a la sección del tronco paralela a las bases y equidistante de ellas.

EJERCICIO 100

Cuestionario de repaso

1. ¿Qué es poliedro? ¿Es el cilindro un poliedro?

2. ¿Qué es prisma? ¿Cómo se nombran los prismas según las bases?

3. ¿Cómo se calcula el área lateral de un prisma? ¿Es un mismo método aplicable a prismas oblicuos y rectos?

4. Defínanse *paralelepípedo, paralelepípedo rectángulo, cubo.* ¿Es todo paralelepípedo rectángulo un cubo? ¿Es todo cubo un paralelepípedo rectángulo?

5. ¿Cuál es la diferencia entre *sólidos iguales* y *sólidos equivalentes*? Si dos cubos tienen una misma altura, ¿son equivalentes? ¿son iguales? ¿Puede decirse otro tanto de dos paralelepípedos cualesquiera?

6. ¿Cuáles son las condiciones de igualdad de dos prismas? ¿de dos prismas rectos? ¿de dos cubos?

7. ¿Qué relación hay entre dos triedros opuestos de un paralelepípedo?

8. ¿Cómo se calcula el volumen de un paralelepípedo?

9. ¿Cómo se halla el volumen de un cilindro? ¿el de un prisma? ¿el de una pirámide? ¿el de un cono?

10. ¿Qué es pirámide? ¿En qué pirámides puede tomarse cualquier cara por base?

11. ¿Cómo se calcula el área lateral de una pirámide? ¿la de un cono recto? ¿la de un tronco de pirámide o de cono recto?

12. ¿Cuántos poliedros regulares convexos pueden existir? ¿Cómo se llaman?

13. ¿Cómo se calculan el volumen, el área lateral y la total de un cono de revolución cuando se conocen el radio de la base y la altura del cono?

LIBRO VIII

LA ESFERA

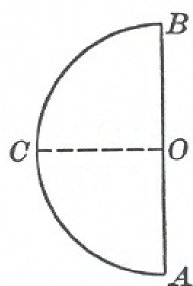
619. Esfera. Llámase *esfera* un sólido limitado por una superficie todos cuyos puntos equidistan de un punto interior.

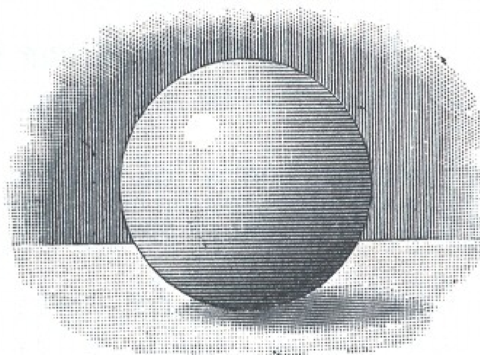
Este punto se llama *centro*. La superficie se llama *superficie esférica*, y a veces *esfera* también. La mitad de una esfera se llama *hemisferio* o *semiesfera*. Los términos *radio* y *diámetro* tienen significados análogos a los dados al tratar del círculo.

620. Generación de la esfera. Síguese de la definición que toda esfera puede suponerse engendrada por la revolución de un semicírculo sobre un diámetro. El radio y el diámetro del semicírculo son respectivamente el radio y el diámetro de la esfera.

Si el semicírculo ACB gira alrededor de AB, engendrará una esfera.

Postúlase que, *dados un punto y una longitud cualesquiera, existe una esfera que tiene ese punto por centro y esa longitud por radio.*

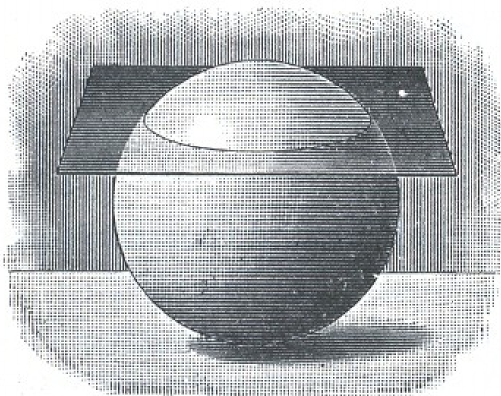


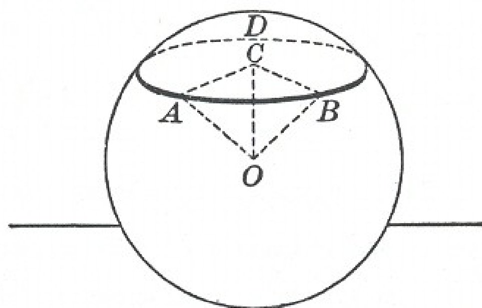


621. Igualdad de los radios y diámetros. Es claro que *todos los radios de una esfera son iguales*, y que *también lo son todos los diámetros*; que *esferas iguales tienen radios iguales*, y que *esferas de radios iguales son iguales.*

Proposición I. Teorema

622. *Toda sección plana de una esfera es un círculo*





Sean *O* el centro de una esfera, y *ABD* una sección determinada por un plano cualquiera.

Demostrar que ABD es un círculo.

Demostración. Trácense dos radios cualesquiera OA, OB a la intersección del plano con la superficie de la esfera, y OC perpendicular al plano.

Los △ OCA, OCB son rectángulos en C; N.º 430

$OC = OC$, y $OA = OB$; N.º 621

$\therefore$ los △ son iguales; N.º 89

$\therefore CA = CB$. N.º 67

Vese pues que todos los puntos de la curva ABD equidistan de C, y que por tanto la sección es un círculo (n.º 159). L.C.D.D

623. Corolario 1.º *La recta que une el centro de una esfera y el de un círculo de la esfera es perpendicular al plano del círculo.*

624. Corolario 2.º *Planos equidistantes del centro de una esfera la cortan en círculos iguales. Si las distancias de dos secciones al centro son desiguales, la que más dista es la menor.*

625. Círculo máximo. Llámase *círculo máximo* la sección de la esfera por un plano que pasa por el centro.

626. Círculo menor. Llámase *círculo menor* de una esfera toda sección plana que no contiene el centro.

627. Polos de un círculo. Llámanse *polos* de un círculo de una esfera los extremos del diámetro de ésta perpendicular al plano del círculo.

628. Corolario 1.° *Todos los círculos cuyos planos son paralelos tienen polos comunes.*

629. Corolario 2.° *Todos los círculos máximos de una esfera son iguales.*

630. Corolario 3.° *Todo círculo máximo bisecta la esfera.*

631. Corolario 4.° *Dos círculos máximos cualesquiera se bisectan entre sí.*

632. Corolario 5.° *Si los planos de dos círculos máximos son perpendiculares entre sí, cada círculo pasa por los polos del otro.*

633. Corolario 6.° *Por dos puntos cualesquiera de la superficie de una esfera puede trazarse un círculo máximo, y por lo general sólo uno.*

Estos dos puntos y el centro generalmente determinan un plano. Discútase el caso en que los dos puntos son los extremos de un diámetro.

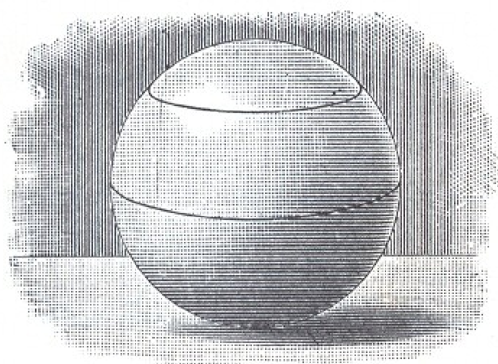
634. Corolario 7.° *Por tres puntos de la superficie de una esfera puede trazarse en esta superficie un círculo, y sólo uno.*

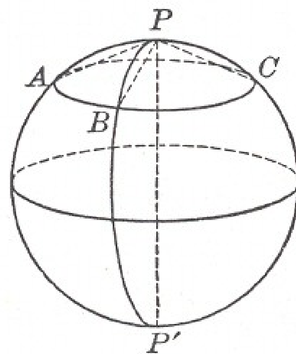
¿Cuántos puntos situados de qué manera determinan un plano?

635. Distancia entre dos puntos de una esfera. Llámase *distancia* entre dos puntos de una esfera, *medida sobre la superficie,* la longitud del arco de círculo máximo que los une.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA

636. *Todos los puntos de un círculo de una esfera equidistan de cada polo del círculo.*





Sean P, P' los polos del círculo ABC, y A, B, C tres puntos cualesquiera del círculo.

Demostrar que los arcos de círculo máximo PA, PB, PC son iguales.

Demostración. Las rectas PA, PB, PC son iguales. N.° 439

Luego los arcos PA, PB, PC son iguales (n.° 172). L.C.D.D.

Análogo razonamiento se aplica a los arcos AP', BP', CP'.

637. Distancia polar. Llámase *distancia polar* de un círculo de una esfera, con respecto a uno de los polos del círculo, el arco de círculo máximo, expresado en grados u otras unidades análogas, comprendido entre el círculo y ese polo.

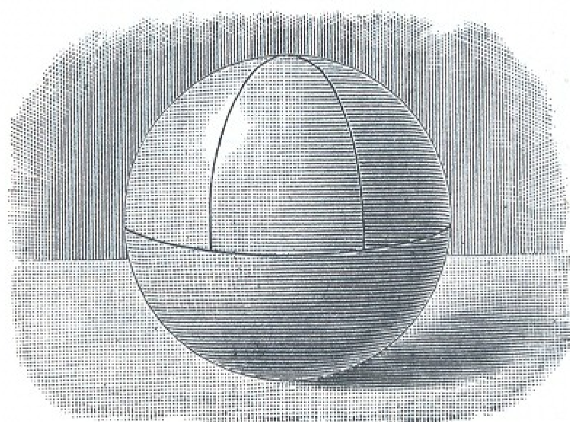
638. Cuadrante. Llámase *cuadrante* de una esfera la cuarta parte de un círculo máximo.

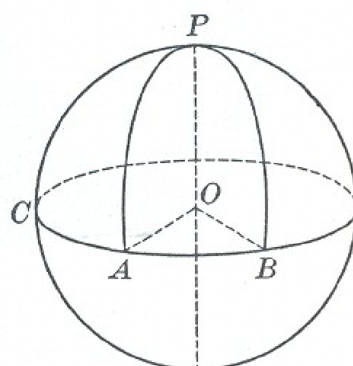
639. COROLARIO 1.° *Las distancias polares de un círculo máximo son cada una igual a un cuadrante.*

640. COROLARIO 2.° *Las rectas que van de los puntos de un círculo a uno de sus polos son iguales.*

PROPOSICIÓN III. TEOREMA

641. *Si la distancia de un punto de una esfera a otros dos que no están diametralmente opuestos es un cuadrante, el primer punto es un polo del círculo máximo que pasa por los otros dos.*





Sean *P* un punto de una esfera, *PA* y *PB* dos cuadrantes, y *ABC* el círculo máximo que pasa por *A* y *B*.

Demostrar que P es uno de los polos del ⊙ ABC.

Demostración. ¿Qué clase de ⊿s son AOP y BOP?

¿Qué es PO con respecto al plano del ⊙ ABC?

¿Síguese de aquí que P es un polo del círculo?

642. Trazar un círculo sobre una esfera. Según este teorema, puede siempre trazarse sobre una esfera de radio dado un círculo máximo que pase por dos puntos dados de ella.

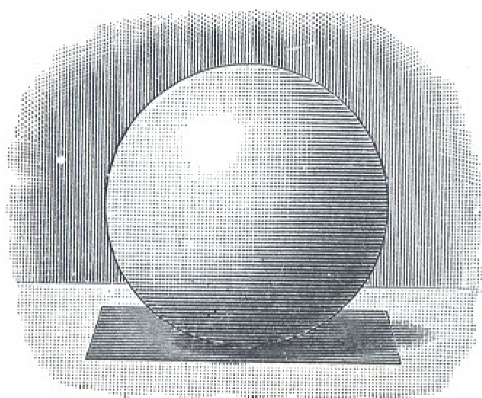
La abertura PA del compás debe ser igual a $\sqrt{r^2 + r^2} = r\sqrt{2}$.

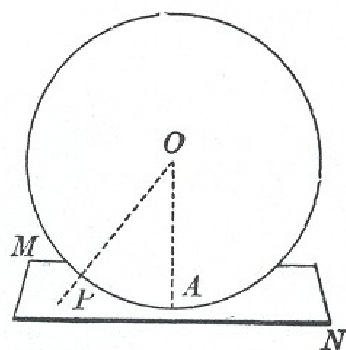
643. Rectas y planos tangentes. Dícese que una recta o un plano y una esfera son *tangentes entre sí* cuando tienen un punto común, y sólo uno. Este punto se llama *punto de contacto.*

644. Esferas tangentes. Dos esferas son *tangentes entre sí* cuando sus superficies tienen un punto común, y sólo uno.

PROPOSICIÓN IV. TEOREMA

645. *Un plano perpendicular a un radio de una esfera en su extremo es tangente a la esfera.*





Sea *MN* un plano perpendicular en *A* al radio *OA*.

Demostrar que MN es tangente a la esfera.

Demostración. Sea *P* otro punto cualquiera de *MN*.

¿Cuál es mayor, *OP* u *OA*?

¿Está pues *P* sobre la esfera, dentro o fuera de ella?

¿Qué se deduce de aquí con respecto a todos los puntos de *MN* distintos de *A*?

¿Por qué se sigue que *MN* es tangente a la esfera?

646. COROLARIO. *Todo plano tangente a una esfera es perpendicular al radio que pasa por el punto de contacto.*

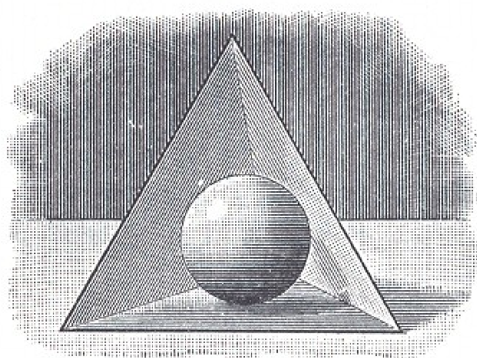
¿Cuáles son el teorema y corolario correspondientes de la geometría plana? ¿Pueden servir de guía en la demostración de este corolario?

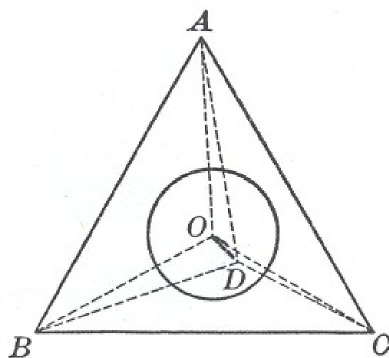
647. Esfera inscrita. Dícese que una esfera está *inscrita* en un poliedro, o éste *circunscrito* a aquélla, cuando todas las caras del poliedro son tangentes a la esfera.

648. Esfera circunscrita. Una esfera está *circunscrita* a un poliedro, o éste *inscrito* en aquélla, cuanto todos los vértices del poliedro están en la superficie de la esfera.

Proposición V. Teorema

649. *En todo tetraedro puede inscribirse una esfera.*





Sea *ABCD* un tetraedro cualquiera.

Demostrar que en el tetraedro ABCD puede inscribirse una esfera.

Demostración. Trácense los planos OAB, OBC, OCA, bisectores de los diedros AB, BC, CA.

Estos tres planos tienen necesariamente un punto común O. (Demuéstrese esto.)

Todo punto del plano OAB equidista de los planos ABC y ABD. N.° 479

Asímismo, todo punto de OBC equidista de los planos ABC y DBC, y todo punto de OCA equidista de los planos ABC y ADC.

Luego el punto O, común a estos tres planos, equidista de las cuatro caras del tetraedro, y es por tanto el centro de una esfera tangente a ellas (n.° 645); esto es, de una esfera inscrita en el tetraedro (n.° 647). L.C.D.D.

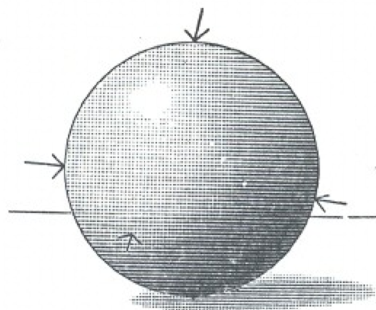
¿Cuál es el teorema correspondiente de la geometría plana? ¿Es análoga la demostración?

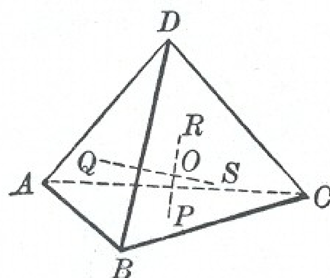
Se demuestra en la geometría plana que las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se encuentran en un punto. ¿Cuál es el teorema correspondiente relativo a los diedros de un tetraedro?

¿Polígonos de qué clase son siempre circunscriptibles a un círculo? ¿Qué se infiere por analogía en cuanto a ciertos sólidos?

Proposición VI. Teorema

650. *A todo tetraedro puede circunscribirse una esfera.*





Sea *ABCD* un tetraedro cualquiera.

Demostrar que a ABCD puede circunscribirse una esfera.

Demostración. Sean P y Q los centros de los círculos circunscritos a las caras ABC y ABD respectivamente.

Trácense $PR \perp$ a la cara ABC, y QS a la ABD.

PR es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A, B y C; y QS, el de los que equidistan de A, B y D. N.° 442

Luego PR y QS están en el plano perpendicular a AB en su punto medio. N.° 443

Si QS fuera $\parallel$ a PR, sería $\perp$ a la cara ABC. N.° 445

Esto es imposible, por ser $QS \perp$ al plano ABD, que corta al plano ABC. Por hipót.

Puesto que PR y QS no son paralelas y están situadas en un mismo plano, deben encontrarse. Sea pues O su punto de intersección.

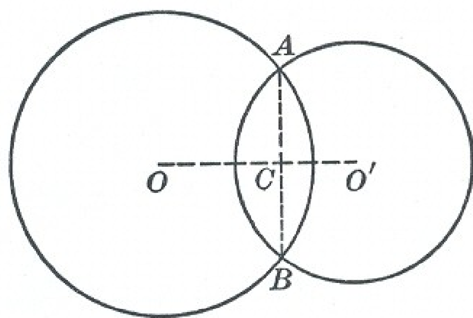
Este punto O equidista de A, B, C y D, y es por tanto el centro de la esfera circunscrita (n.° 648). L.C.D.D.

651. Corolario. *Por cuatro puntos no situados en un mismo plano puede siempre hacerse pasar una superficie esférica.*

El centro de una esfera que pasa por los cuatro puntos debe hallarse en los planos arriba citados, y como tienen sólo un punto común, no puede haber más que una esfera.

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

652. *La intersección de dos superficies esféricas es un círculo cuyo plano es perpendicular a la línea de los centros de las esferas y cuyo centro está situado en esa línea.*



Sean O y O' los centros de dos esferas que se cortan.

Demostrar que las esferas se cortan en un círculo cuyo plano es perpendicular a OO' y cuyo centro está en OO'.

Demostración. Sean A y B las intersecciones de dos círculos máximos cualesquiera determinados por un plano que contenga OO'.

OO' es $\perp$ a AB en su punto medio. N.° 195

Si el plano gira alrededor de OO', los dos círculos engendran las superficies esféricas, y A engendra su línea de intersección.

Durante la rotación, AC permanece constante y $\perp$ a OO'.

Luego A engendra un círculo de centro C y cuyo plano es perpendicular a OO' (n.° 432). L.C.D.D.

653. Ángulo esférico. Llámase *ángulo esférico* la abertura o separación entre los arcos de dos círculos máximos de una esfera.

Se toma por medida de un ángulo esférico el ángulo plano cuyos lados son tangentes a los dos arcos en su punto de intersección y parten de este punto en el mismo sentido que dichos arcos. Ese punto de intersección es el *vértice* del ángulo esférico.

EJERCICIO 101

1. Las cuatro perpendiculares a las caras de un tetraedro levantadas en los centros de los círculos circunscritos a esas caras son concurrentes.

2. Los planos perpendiculares a las aristas de un tetraedro en sus puntos medios se encuentran en un punto.

3. Los seis planos bisectores de los diedros de un tetraedro se encuentran en un punto.

4. Todos los círculos de una esfera que tienen distancias polares iguales son iguales.

5. Todos los círculos iguales de una esfera tienen distancias polares iguales relativas a polos semejantemente dispuestos; esto es, a sus polos más cercanos o a sus más distantes.

6. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano equidistantes de un punto dado del plano? ¿Cuál el de los puntos del espacio equidistantes de un punto dado cualquiera?

7. Toda tangente a un círculo máximo está contenida en el plano tangente a la esfera en el punto de contacto de aquélla.

8. Toda recta trazada en un plano tangente a una esfera por el punto de contacto es tangente a la esfera en ese punto.

9. Por un punto cualquiera situado sobre una esfera puede pasar un plano tangente a ella, y sólo uno.

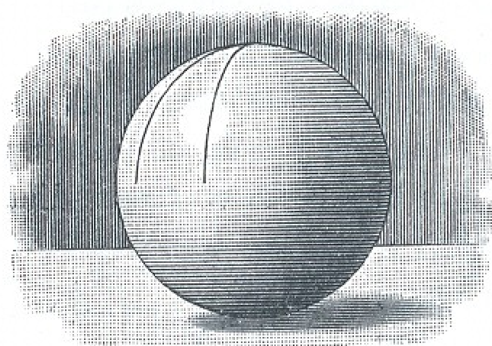
10. Hállese en un plano un punto equidistante de dos rectas del plano que se cortan, y que esté a una distancia dada de un punto exterior al plano. Discútase el problema.

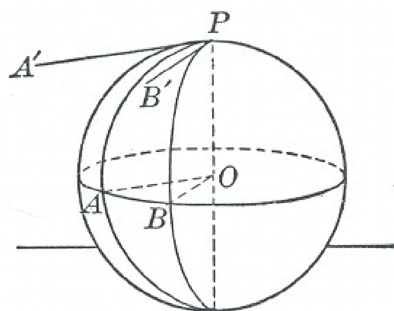
11. ¿Cuántos puntos determinan una recta? ¿un círculo? ¿una superficie esférica? Demuéstrese que dos superficies esféricas coinciden si tienen comunes este número de puntos.

12. Si dos planos tangentes a una esfera en C y D se cortan según la recta AB, la CD es perpendicular a AB; esto es, por CD puede trazarse un plano perpendicular a AB (n.° 450).

PROPOSICIÓN VIII. TEOREMA

654. *Todo ángulo esférico tiene por medida el arco que sus lados interceptan en un círculo máximo que tiene el vértice del ángulo por uno de sus polos.*





Sean PA, PB, dos arcos de círculos máximos que forman el ángulo esférico APB; PA' y PB' las tangentes a estos arcos en P; AB, un arco de círculo máximo descrito de P como polo.

Demostrar que el ángulo esférico APB tiene por medida el arco AB.

Demostración. En el plano POB, PB' es $\perp$ a PO, N.° 185

y OB es $\perp$ a PO; N.° 213

$\therefore PB'$ es $\parallel$ a OB. N.° 95

Asímismo, PA' es $\parallel$ a OA;

$\therefore \angle A'PB' = \angle AOB$. N.° 461

Ahora bien, AOB tiene por medida el arco AB; N.° 213

$\therefore \angle A'PB'$ tiene por medida el arco AB.

$\therefore \angle APB$ tiene por medida el arco AB (n.° 653). L.C.D.D.

655. COROLARIO 1.° *Todo ángulo esférico tiene la misma medida que el diedro formado por los planos de los dos círculos.*

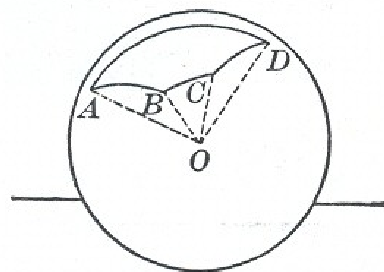
656. COROLARIO 2.° *Todo arco de círculo máximo que pasa por un polo de otro círculo máximo es perpendicular a éste.*

657. Polígono esférico. Llámase *polígono esférico* toda superficie que forma parte de la de una esfera y está limitada por arcos de círculos máximos de la esfera.

Estos arcos se llaman *lados* del polígono; los ángulos esféricos que forman, *ángulos* del polígono, y los vértices de éstos, *vértices* del polígono.

658. Relación entre los polígonos esféricos y los ángulos poliedros. Los planos de los lados de un polígono esférico forman un ángulo poliedro cuyo vértice es el centro de la esfera, cuyas caras tienen por medida los lados del polígono, y cada uno de cuyos diedros tiene la misma medida que el ángulo correspondiente del polígono.

Los planos de los lados del polígono $ABCD$ forman el ángulo poliedro O-$ABCD$. Las caras BOA, COB . . . tienen por medidas respectivas los lados AB, BC . . . del polígono. El diedro cuya arista es OA tiene la misma medida que el ángulo esférico BAD.



Síguese que *a toda propiedad de los ángulos poliedros corresponde una análoga de los polígonos esféricos, y recíprocamente.*

659. Polígono esférico convexo. Dícese que un polígono esférico es *convexo* cuando el ángulo poliedro correspondiente es convexo (n.° 491).

Aquí se tratará sólo de polígonos convexos, a menos que se diga lo contrario.

660. Diagonal. Llámase *diagonal* de un polígono esférico todo arco de círculo máximo que une dos vértices no consecutivos.

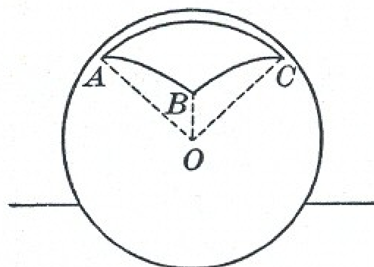
661. Triángulo esférico. Llámase *triángulo* esférico el polígono esférico de tres lados.

Los triángulos esféricos, como los planos, pueden ser *rectángulos*, *obtusángulos*, *isósceles*, etc.

662. Polígonos esféricos iguales. Dícese que dos polígonos esféricos son *iguales* cuando son superponibles.

Proposición IX. Teorema

663. *Cada lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos.*



Sea CA el lado mayor del triángulo esférico ABC.

Demostrar que $CA < AB + BC$.

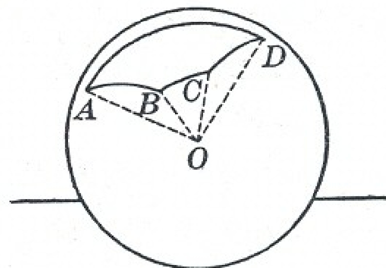
Demostración. En el triedro $O\text{-}ABC$,

$\angle COA < \angle BOA + \angle COB$. N.° 494

$\therefore CA < AB + BC$ (n.° 658). L.C.D.D.

Proposición X. Teorema

664. *La suma de los lados de un polígono esférico es menor que 360°.*



Sea $ABCD$ un polígono esférico cualquiera.

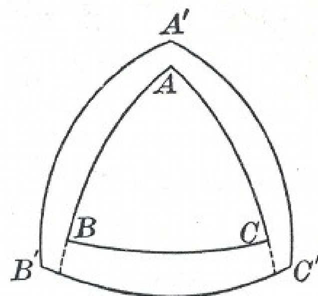
Demostrar que $AB + BC + CD + DA < 360°$.

Demostración.

$\angle BOA + \angle COB + \angle DOC + \angle DOA < 360°$. N.° 495

$\therefore AB + BC + CD + DA < 360°$ (n.° 658). L.C.D.D.

665. Triángulo polar. Denomínase *triángulo polar* de un triángulo esférico el triángulo esférico cuyos lados tienen por polos los vértices del otro.



Si, por ejemplo, A es el polo del lado $B'C'$, B el del $C'A'$, y C el del $A'B'$, el triángulo $A'B'C'$ es el polar del ABC.

Si con A, B y C como polos se describen círculos máximos completos, dividirán la superficie de la esfera en ocho triángulos esféricos. El polar del ABC es aquel cuyo vértice A', correspondiente a A, está situado del mismo lado de BC que A; y así de los otros vértices.

EJERCICIO 102

1. Dígase cómo se puede dividir un arco dado de círculo máximo en dos partes iguales.

¿Cómo puede trasportarse el arco al papel?

2. Demuéstrese que dos ángulos esféricos opuestos por el vértice son iguales.

3. Describir un círculo máximo que pase por un punto dado de la superficie de una esfera y sea perpendicular a un círculo máximo dado de la esfera.

4. Demuéstrese que todo punto de un círculo máximo que bisecta un arco de otro y es perpendicular a él equidista de sus extremos (n.° 635).

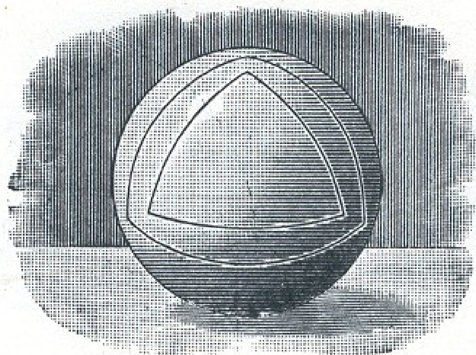
5. Si dos lados de un triángulo esférico son de 82° 47′ y 67° 39′ respectivamente, ¿qué se deduce con respecto a la magnitud del tercer lado?

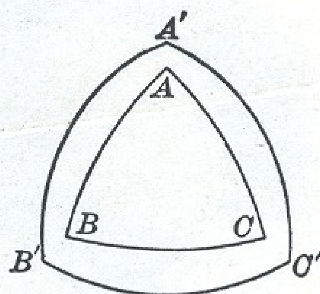
6. Tres lados de un cuadrilátero esférico son 86° 29′, 73° 47′ y 69° 54′ respectivamente. ¿Qué se deduce con respecto a la magnitud del otro?

7. Hágase el dibujo de una esfera y en ella el de un triángulo esférico equilátero con lados de 90°, y el del triángulo polar de éste.

PROPOSICIÓN XI. TEOREMA

666. *Si un triángulo esférico es el polar de otro, el segundo es el polar del primero.*





Sea $A'B'C'$ el triángulo polar del ABC.

Demostrar que ABC es el triángulo polar del $A'B'C'$.

Demostración. Puesto que A es un polo de $B'C'$,

y C uno de $A'B'$, N ° 665

la distancia de B' a A y C es un cuadrante; N.° 639

$\therefore B'$ es un polo de AC. N.° 641

Asímismo, A' es un polo de BC,

y C' uno de AB.

$\therefore ABC$ es el triángulo polar del $A'B'C'$ (n.° 665). L.C.D.D.

¿Es necesario que uno de los triángulos esté enteramente dentro del otro? Trácese la figura a pulso, empezando con el triángulo ABC, y haciendo $AB = 100°$, $AC = 100°$, $BC = 30°$.

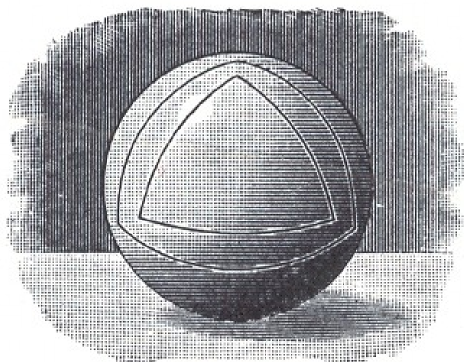
Dibújese otra con $AB = 120°$, $AC = 80°$, $BC = 40°$.

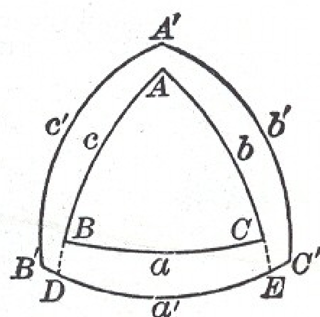
Suponiendo que ABC es el triángulo polar de $A'B'C'$, demuéstrese que $A'B'C'$ es el polar del ABC.

En el estudio de los triángulos esféricos es de grande utilidad tener una pizarra de forma esférica. A falta de ella puede emplearse una bola de madera. Las figuras deben trazarse con la mayor exactitud posible y compararse con las dadas en perspectiva en el texto.

PROPOSICIÓN XII. TEOREMA

667. *En dos triángulos polares, cada ángulo del uno es suplementario del lado opuesto del otro.*





Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos polares, en que las letras de los vértices representan los valores de los ángulos, y las puestas sobre los lados representan los valores de éstos, en grados.

Demostrar que $A + a' = 180°$, $B + b' = 180°$, $C + c' = 180°$;

$A' + a = 180°$, $B' + b = 180°$, $C' + c = 180°$.

Demostración. Prolónguense los dos arcos AB, AC hasta sus intersecciones D y E con $B'C'$.

B' es polo de AE; $\therefore B'E = 90°$. N.° 639

C' es polo de AD; $\therefore DC' = 90°$

$\therefore B'E + DC' = 180°$,

o sea, $B'D + DE + DC' = 180°$,

o bien, $DE + B'C' = 180°$.

Pero DE es la medida del $\angle A$, N.° 654

y $B'C' = a'$;

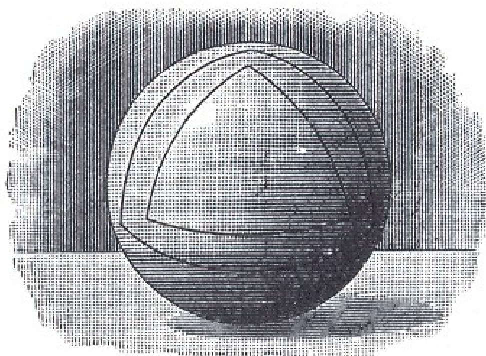
$\therefore A + a' = 180°$.

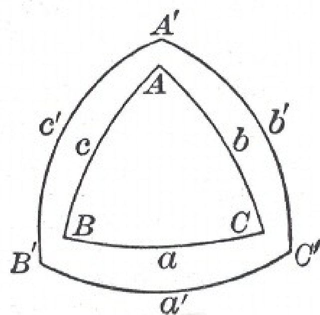
Asímismo, $B + b' = 180°$, $C + c' = 180°$.

De una manera análoga se demuestran las otras relaciones, prolongando los lados del $\triangle ABC$. L.C.D.D

Proposición XIII. Teorema

668. *La suma de los ángulos de un triángulo esférico es mayor que dos rectos y menor que seis.*





Sea ABC un triángulo esférico cualquiera de ángulos A, B, C y lados a, b, c.

Demostrar que $A + B + C > 180°$ *y* $< 540°$.

Demostración. Sea $A'B'C'$ el polar del $\triangle ABC$.

$$A + a' = 180°,\ B + b' = 180°,\ C + c' = 180°; \quad \text{N.° 667}$$

$$\therefore A + B + C + a' + b' + c' = 540°;$$

$$\therefore A + B + C = 540° - (a' + b' + c').$$

Ahora bien, $a' + b' + c' < 360°$; N.° 664

$$\therefore A + B + C = 540° - \text{una cantidad menor que } 360°;$$

$$\therefore A + B + C > 180°.$$

Además, $a' + b' + c' > 0°$.

$$\therefore A + B + C < 540°. \quad \text{L.C.D.D.}$$

669. Corolario. *Un triángulo esférico puede tener dos y aun tres ángulos rectos u obtusos.*

670. Clasificación de los triángulos esféricos según el número de sus ángulos rectos. Llámase triángulo esférico *birrectángulo* el que tiene dos ángulos rectos. El que tiene tres rectos se llama triángulo *trirrectángulo*.

Los mismos términos se aplican a los triedros correspondientes.

EJERCICIO 103

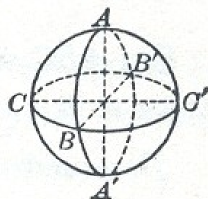
1. Si dos lados de un triángulo esférico son cuadrantes, el tercer lado es la medida del ángulo opuesto.

2. En un triángulo esférico birrectángulo, los lados opuestos a los ángulos rectos son cuadrantes, y el lado opuesto al tercer ángulo es la medida de éste.

Puesto que los ∠s son rectos, ¿cuáles dos planos son ⊥s a cierto plano? Luego ¿cuáles dos arcos deben pasar por un polo de cierto arco (n.º 632)? ¿Cuáles dos arcos son cuadrantes? ¿Cuál es la medida del tercer ángulo del triángulo (n.º 654)?

3. Los tres lados de un triángulo esférico trirrectángulo son cuadrantes.

4. Si por el centro de una esfera se trazan tres planos perpendiculares entre sí, dividirán la superficie de la esfera en ocho triángulos trirrectángulos iguales.



Hállense los lados, en grados, minutos y segundos, de un triángulo esférico los ángulos de cuyo polar son:

5. 82°, 77°, 69°.

6. 84° 30′, 81° 45′, 72° 10′.

7. 78° 30′, 89°, 102°.

8. 83° 40′, 48° 57′, 103° 43′

9. 96° 37′ 40″, 82° 29′ 30″, 68° 47′.

10. 43° 29′ 37″, 98° 22′ 53″, 87° 36′ 39″.

Hállense los ángulos de un triángulo esférico los lados de cuyo polar son:

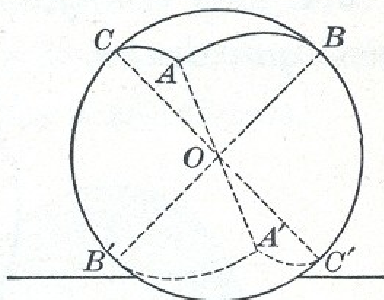
11. 68° 42′ 39″, 93° 48′ 7″, 89° 38′ 14″.

12. 78° 47′ 29″, 106° 36′ 42″, un cuadrante.

13. Un cuadrante, medio cuadrante, tres cuartos de cuadrante.

14. Por el centro de una esfera se trazan tres radios perpendiculares entre sí. ¿Qué valores tienen los lados y ángulos del triángulo cuyos vértices son los extremos de esos radios?

671. Triángulos esféricos simétricos. Si por el centro O de una esfera se trazan tres diámetros AA', BB', CC', los triángulos esféricos ABC, $A'B'C'$, cuyos vértices están diametralmente opuestos, se llaman *triángulos simétricos entre sí*, y cada uno es el *simétrico* del otro.

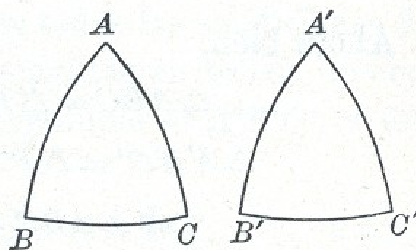


Puede asímismo formarse dos polígonos simétricos de cualquier número de lados. Dos triángulos u otros dos polígonos esféricos pueden ser simétricos sin que estén dispuestos como acaba de explicarse; basta para ello que, haciéndolos deslizar sobre la esfera, puedan colocarse de la manera dicha.

672. Relación entre dos triángulos simétricos. Dos triángulos esféricos simétricos tienen iguales respectivamente tanto sus lados como sus ángulos, pero pueden no ser congruentes o superponibles. Si en la figura anterior se mueve el triángulo ABC sobre la superficie de la esfera hasta que A coincida con A', es claro que los dos triángulos no pueden hacerse coincidir, por tener sus partes dispuestas en orden inverso.

La relación entre dos triángulos simétricos es semejante a la que hay entre los guantes derecho e izquierdo, como se ha dicho en otra parte. El alumno puede ver esto mejor formando dos triángulos simétricos en la superficie de la corteza de una naranja, y luégo sacando las partes correspondientes de la corteza.

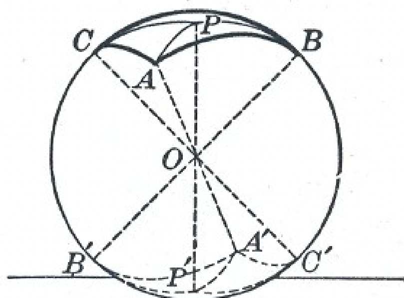
673. Triángulos simétricos isósceles. Sin embargo, si los triángulos simétricos son isósceles, como ABC, $A'B'C'$, en que $AB = AC$, y $A'B' = A'C'$, los triángulos pueden hacerse coincidir, puesto que $AB = AC = A'B' = A'C'$, y los ángulos A y A' son iguales, por ser las medidas de diedros opuestos por la arista (n.º 671). Así pues,



Dos triángulos esféricos isósceles simétricos entre sí son superponibles y por tanto iguales.

PROPOSICIÓN XIV. TEOREMA

674. *Dos triángulos esféricos simétricos cualesquiera son equivalentes.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos esféricos simétricos, en que los vértices A, B, C están diametralmente opuestos a los A', B', C'.

Demostrar que ABC y $A'B'C'$ son equivalentes.

Demostración. Sea P un polo de un círculo menor que pase por A, B, C. Trácense el diámetro POP' y los arcos de círculos máximos PA, PB, PC, $P'A'$, $P'B'$, $P'C'$.

Se tiene: $PA = PB = PC$. N.° 636

Ahora bien, $PA = P'A'$, $PB = P'B'$, $PC = P'C'$; N.° 672

$$\therefore P'A' = P'B' = P'C';$$

$\therefore$ los dos $\triangle$ simétricos PCA, $P'C'A'$ son isósceles;

$\therefore$ los $\triangle PCA$, $P'C'A'$ son iguales. N.° 673

Asímismo,

el $\triangle PBA$ es igual al $P'B'A'$, y el PBC al $P'B'C'$

Ahora bien,

$$\triangle ABC = \triangle PCA + \triangle PBA + \triangle PBC,$$

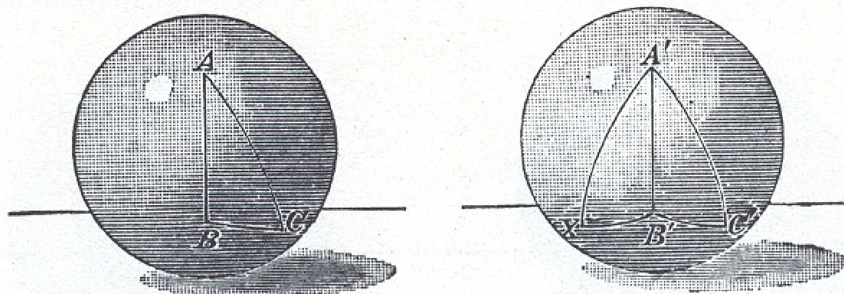
$$\triangle A'B'C' = \triangle P'C'A' + \triangle P'B'A' + \triangle P'B'C'.$$

el $\triangle ABC$ es equivalente al $A'B'C'$. L.C.D.D.

Si P está fuera del $\triangle ABC$, P' estará fuera del $A'B'C'$. Cada triángulo será equivalente a la suma de dos triángulos isósceles menos otro triángulo isósceles, y el resultado será el mismo de antes.

Proposición XV. Teorema

675. *En una misma esfera o en esferas iguales, dos triángulos que tienen iguales respectivamente dos lados y el ángulo comprendido son iguales o simétricos.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos esféricos en que $AB = A'B'$, $AC = A'C'$, ángulo $A =$ ángulo A', y las partes están semejantemente dispuestas; y sea $A'B'X$ un triángulo simétrico del $A'B'C'$.

Demostrar que el triángulo ABC es igual al $A'B'C'$ y simétrico con el $A'B'X$.

Demostración. La igualdad de los triángulos ABC y $A'B'C'$ se demuestra por el método de superposición, lo mismo que en los triángulos planos. N.° 68

Puesto que $A'B'X$ y $A'B'C'$ son simétricos,

y ABC es igual a $A'B'C'$,

$$AC = A'X,\ AB = A'B',\ \angle A = \angle XA'B'.$$

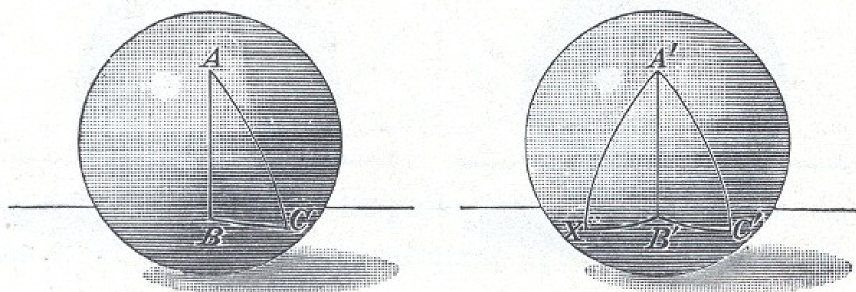
Los $\triangle ABC$ y $A'B'X$ satisfacen pues todas las condiciones del enunciado, pero tienen las partes dispuestas en orden inverso. Ahora bien, como el $\triangle ABC$ es superponible al $A'B'C'$, y éste es simétrico con $A'B'X$, síguese que

el $\triangle ABC$ es simétrico con el $A'B'X$. L.C.D.D.

En el caso de dos triángulos planos cuyas partes homólogas están dispuestas en sentido inverso, los triángulos pueden hacerse coincidir. ¿Por qué no sucede lo mismo con triángulos esféricos?

PROPOSICIÓN XVI. TEOREMA

676. *En una misma esfera o en esferas iguales, dos triángulos son iguales o simétricos si un lado y los ángulos adyacentes del uno son iguales respectivamente a las partes correspondientes del otro.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos esféricos en que $AC = A'C'$, ángulo $A =$ ángulo A', ángulo $C =$ ángulo C', y las partes están semejantemente dispuestas; y sea además $A'B'X$ un triángulo simétrico del $A'B'C'$.

Demostrar que el triángulo ABC es igual al $A'B'C'$ y simétrico con el $A'B'X$.

Demostración. La igualdad de los dos triángulos ABC y $A'B'C'$ se demuestra por el método de superposición, como en los triángulos planos. N.º 72

Puesto que $A'B'X$ es simétrico con $A'B'C'$,

y ABC es igual a $A'B'C'$,

síguese que

$$\angle A = \angle XA'B', \ \angle C = \angle X, \text{ y } AC = A'X.$$

Síguese de aquí, como en el n.º 675, que

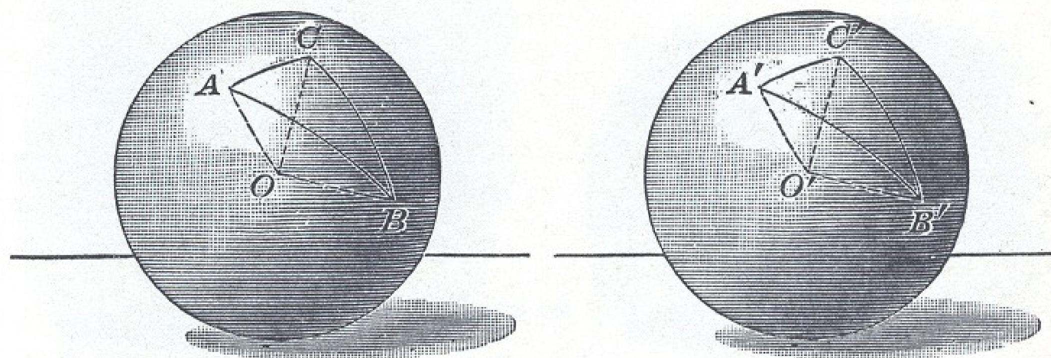
el $\triangle ABC$ es simétrico con el $A'B'X$. L. C. D. D.

¿En qué caso son a la vez iguales y simétricos los dos triángulos?

¿Cuál es el caso correspondiente a éste en la teoría de los triángulos planos?

Proposición XVII. Teorema

677. *En una misma esfera o en esferas iguales, si los lados de un triángulo son respectivamente iguales a los de otro, los ángulos también lo son, y los triángulos son iguales o simétricos.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos esféricos de esferas iguales, y supóngase que $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$.

Demostrar que $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, y que los triángulos ABC y $A'B'C'$ son iguales o simétricos.

Demostración. Sean O, O' los centros de las esferas.

Trácense en cada esfera los tres planos determinados por los lados del triángulo y el centro de la esfera.

Los triedros O, O' tienen sus caras respectivamente iguales. N.º 167

Luego los tres diedros correspondientes son respectivamente iguales (n.º 499), y por tanto

los ∠s de los dos △s son respectivamente iguales. N.º 655

∴ los △s son iguales o simétricos (n.º 676). L.C.D.D.

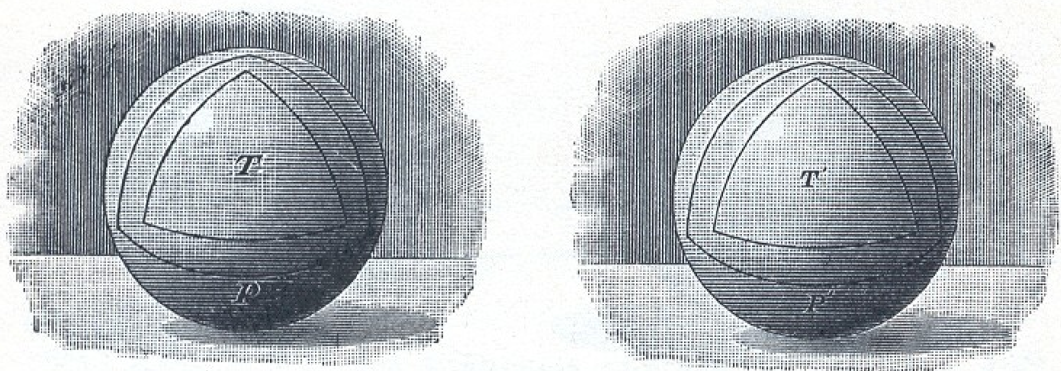
En las figuras anteriores las partes están semejantemente dispuestas, y los triángulos son iguales.

Discútase el caso en que los triángulos son equiláteros y tienen un cuadrante por lado.

¿Cuál es el teorema correspondiente relativo a los triángulos planos?

PROPOSICIÓN XVIII. TEOREMA

678. *En una misma esfera o en esferas iguales, si los ángulos de un triángulo son respectivamente iguales a los de otro, los lados también lo son, y los triángulos son iguales o simétricos.*



Sean T y T' dos triángulos esféricos de esferas iguales, y tales que los ángulos del uno son respectivamente iguales a los ángulos del otro.

Demostrar que los ángulos de T son respectivamente iguales a los de T', y que T y T' son iguales o simétricos.

Demostración. Sean P el $\triangle$ polar de T, y P' el de T'.

Puesto que los $\measuredangle$ de T son iguales a los de T', Por hipót.

los lados de P son respectivamente iguales a los de P'; N.° 667

$\therefore$ los $\measuredangle$ de P son respectivamente iguales a los de P'. N.° 677

Ahora bien,

T y T' son los $\triangle$ polares de P y P'; N.° 666

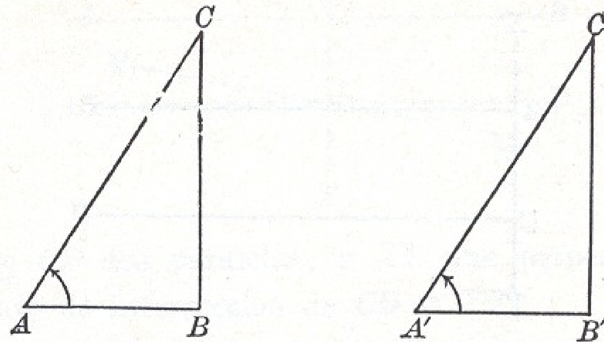
$\therefore$ los lados de T son iguales a los de T'. N.° 667

$\therefore$ T y T' son iguales o simétricos (n.° 677). L.C.D.D

El teorema anterior se aplica solamente, según lo dice el enunciado, a triángulos de una misma esfera o de esferas iguales. Si las esferas son desiguales, los triángulos también lo son.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

91. *Dos triángulos rectángulos son iguales si tienen iguales respectivamente la hipotenusa y uno de los ángulos adyacentes a ella.*



Sean ABC, $A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en que las hipotenusas AC y $A'C'$ son iguales, y el ángulo A es igual al A'.

Demostrar que $\triangle ABC = \triangle A'B'C'$.

Demostración. Colóquese el triángulo ABC sobre el $A'B'C'$ de suerte que el vértice A coincida con el vértice A' y AC tome la dirección de $A'C'$

Entonces C caerá sobre C'.

(*Síguese esto de que se supone que* $AC = A'C'$.)

AB tomará la dirección $A'B'$.

(*Síguese esto de que se supone que* $\angle A = \angle A'$.)

Puesto que C coincide con C'

y los $\angle s\ B$ y B' son rectos,

CB coincidirá con $C'B'$. N.° 82

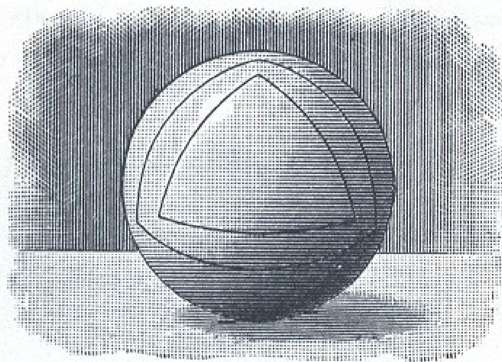
(*De un punto exterior a una recta no puede bajarse a esa recta más de una perpendicular.*)

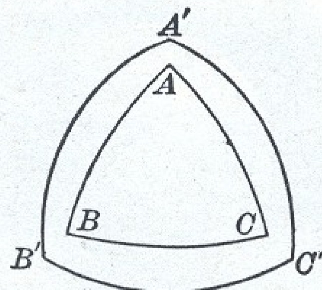
$\therefore \triangle ABC = \triangle A'B'C'$. N.° 16

(*Dos figuras cualesquiera son iguales cuando pueden hacerse coincidir en todos sus puntos.*) **L. C. D. D**

PROPOSICIÓN XX. TEOREMA

680. *Si un triángulo esférico tiene dos ángulos iguales, los lados opuestos a ellos son iguales.*





Sea *ABC* un triángulo esférico en que el ángulo *B* es igual al *C*.

Demostrar que $AC = AB$.

Demostración. Sea $A'B'C'$ el triángulo polar del ABC.

$\angle B = \angle C$;

$\therefore A'C' = A'B'$; N.° 667

$\therefore \angle B' = \angle C'$. N.° 679

$\therefore AC = AB$ (n.° 667). L.C.D.D

EJERCICIO 105

1. Dividir un ángulo esférico en dos iguales.

2. Construír un triángulo esférico, dados dos lados y el ángulo comprendido.

3. Construír un triángulo esférico, dados un lado y los dos ángulos adyacentes.

4. Construír un triángulo esférico, dados los tres lados.

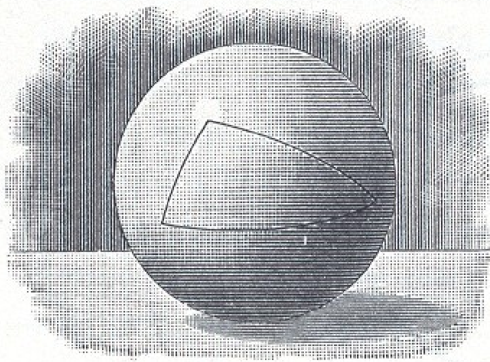
5. Construír un triángulo esférico, dados los tres ángulos.

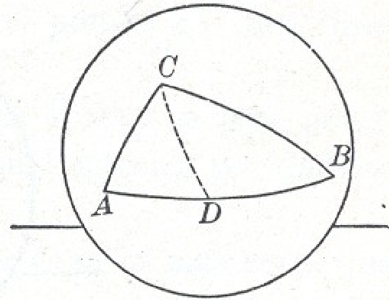
6. Trazar un plano tangente a una esfera dada por un punto dado de la superficie.

7. Trazar un plano tangente a una esfera dada por una recta dada exterior a la esfera.

Proposición XXI. Teorema

681. *En todo triángulo esférico, a mayor ángulo se opone mayor lado, y a mayor lado mayor ángulo.*





Sea ABC un triángulo esférico en que el ángulo C es mayor que el ángulo B.

Demostrar que $AB > AC.$

Demostración. Trácese el arco de círculo máximo CD de suerte que el $\angle DCB$ sea igual al B.

$DB = DC.$ N.° 680

Ahora bien, $AD + DC > AC.$ N.° 663

$\therefore AD + DB > AC$, o $AB > AC.$ L.C.D.D.

Sea ABC un triángulo esférico en que $AB > AC$.

Demostrar que $\angle C > \angle B.$

Demostración. El ángulo C debe ser igual, menor o mayor que el ángulo B.

Si $C = B$, entonces $AB = AC$, N.° 680

lo que es contra el supuesto.

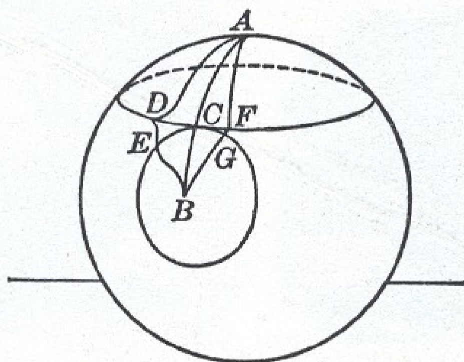
Si $C < B$, entonces $AB < AC$,

lo que es contra el supuesto.

$\therefore \angle C > \angle B.$ L.C.D.D

Proposición XXII. Teorema

682. *La línea más corta que puede trazarse sobre una esfera entre dos puntos de su superficie es un arco de círculo máximo.*



Sea AB el arco menor del círculo máximo que pasa por los puntos A y B de la superficie de una esfera.

Demostrar que AB es la línea más corta que puede trazarse entre A y B sobre la superficie de la esfera.

Demostración. Sea C un punto cualquiera de AB.

De A y B por polos, y con las cuerdas AC y BC por radios trácense los arcos DCF, GCE.

Estos dos arcos no tienen más punto común que el C.

En efecto, sea F otro punto cualquiera de DCF. Trácense los arcos de círculo máximo AF, BF.

Ahora bien, $AF = AC$, N.° 636

$$AF + BF > AC + BC \qquad \text{N.° 663}$$

Restando AF del primer miembro de esta desigualdad, y su igual AC del segundo, resulta:

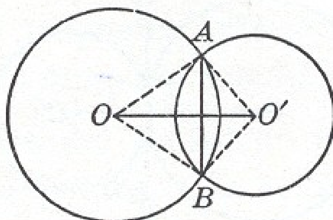
$$BF > BC,$$

y, como $BC = BG$ (n.° 636), $BF > BG$.

Luego F está fuera del círculo de polo B, y así los arcos DCF, GCE no tienen más punto común que C.

PROPOSICIÓN XIII. TEOREMA

195. *La línea de los centros de dos circunferencias que se cortan es la perpendicular bisectriz de la cuerda común.*



Sean O, O' los centros de dos circunferencias que se cortan, AB la cuerda común, y OO' la línea de los centros.

Demostrar que OO' es perpendicular a AB en su punto medio.

Demostración. Trácense OA, OB, $O'A$, $O'B$.

$OA = OB$, y $O'A = O'B$; N.º 162

$\therefore$ tanto O como O' equidistan de A y B.

$\therefore$ OO' es la perpendicular bisectriz de AB (n.º 151). L.C.D.D.

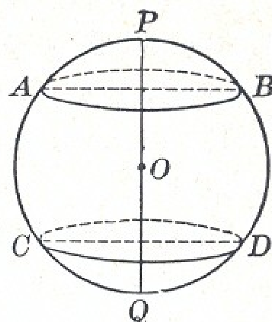
196. Tangentes comunes. Una tangente común a dos círculos es *externa* si no corta la línea de los centros entre éstos; *interna*, si corta esa línea entre los centros.

EJERCICIO 30

Descríbase la posición relativa de dos circunferencias, y trácese la figura correspondiente a cada caso, cuando la distancia entre los centros es:

1. Mayor que la suma de los radios.
2. Igual a la suma de los radios.
3. Menor que la suma y mayor que la diferencia de los radios
4. Igual a la diferencia de los radios.
5. Menor que la diferencia de los radios.

683. Zona. Llámase *zona esférica,* o *zona* simplemente, la parte de la superficie de una esfera comprendida entre las circunferencias de dos secciones paralelas.



En la tierra, por ejemplo, tenemos la zona tórrida, limitada por los trópicos de Cáncer y Capricornio, que son dos círculos paralelos.

Las dos circunferencias que limitan una zona se llaman *bases* de la zona.

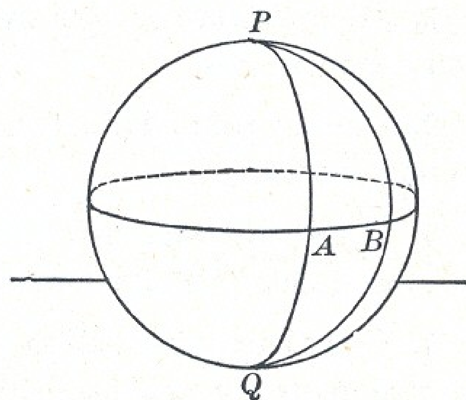
La distancia entre los planos de las bases se llama *altura* de la zona.

Si el plano de una de las bases de una zona es tangente a la esfera, la zona se llama *zona de una base* o *casquete esférico*. Si los planos de ambas bases son tangentes a la esfera, la zona se confunde con la superficie entera de la esfera.

684. Generación de una zona. Todo arco de círculo máximo que ejecuta una revolución completa girando alrededor de un diámetro, engendra una zona.

Por ejemplo, si en la figura anterior el semicírculo $PACQ$ gira sobre el diámetro PQ, el arco AC engendra la zona AD; el arco AP, la zona ABP de una base; el CQ, la CQD.

685. Lúnula. Llámase *lúnula* la parte de la superficie de una esfera limitada por las semicircunferencias de dos círculos máximos.



Por ejemplo, $PAQB$, cuyos límites son las semicircunferencias PAQ, PBQ, es una lúnula. Es evidente que una lúnula puede considerarse engendrada por la rotación de un semicírculo máximo sobre su diámetro.

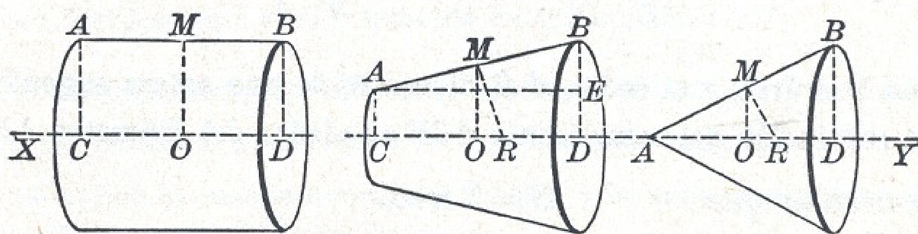
686. Ángulo de una lúnula. El *ángulo de una lúnula* es el ángulo formado por las dos circunferencias que la limitan.

Así, APB es el ángulo de la lúnula $PAQB$.

Cuando el ángulo de una lúnula es 180°, la lúnula forma un hemisferio.

PROPOSICIÓN XXIII. TEOREMA

687. *El área de la superficie engendrada por la revolución de una recta alrededor de un eje situado en el mismo plano es igual a la proyección de la recta sobre el eje multiplicada por la circunferencia cuyo radio es la perpendicular levantada a la recta en su punto medio y limitada por el eje.*



Sean XY un eje situado en el plano de la recta AB, la cual gira sobre XY; M, el punto medio de AB; CD, la proyección de AB sobre XY; MO, la perpendicular de M a XY; MR, la perpendicular a AB en M, en el plano AB-XY; S, el área de la superficie engendrada por AB.

Demostrar que $S = CD \times 2\pi \cdot MR$.

Demostración. 1.° Si AB es $\parallel$ a XY (primera figura), la proyección CD es igual a AB, la perpendicular MR coincide con MO, y S es el área lateral de un cilindro recto. N.° 588

2.° Si AB no es $\parallel$ a XY (segunda figura), S es el área lateral de un cono truncado de revolución, y $S = AB \times 2\pi \cdot MO$. N.° 616

Trácese $AE \parallel$ a XY.

Los $\triangle AEB$, MOR son semejantes; N.° 290

$\therefore MO : AE = MR : AB$, y $AB \times MO = AE \times MR$, N.° 261

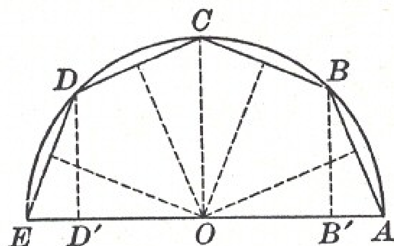
o sea, $AB \times MO = CD \times MR$.

$\therefore S = CD \times 2\pi \cdot MR$. L.C.D.D.

Discútase el caso representado en la tercera figura.

PROPOSICIÓN XXIV. TEOREMA

688. *El área de una esfera es igual al producto del diámetro por una circunferencia máxima.*



Sean S el área, r el radio, d el diámetro de una esfera engendrada por la revolución del semicírculo ACE alrededor del diámetro AE.

Demostrar que $S = 2\,\pi rd.$

Demostración. Inscríbase en el semicírculo la mitad $ABCDE$ de un polígono regular de número par de lados.

Del centro O trácense perpendiculares a los lados. Estas perpendiculares pasarán por los puntos medios de los lados (n.° 174) y serán iguales. N.° 178

Sea l la longitud común de estas perpendiculares.

De B, C y D trácense las $\perp$s BB', CO, DD' a AE.

Área engendrada por $AB = AB' \cdot 2\,\pi l$,

área engendrada por $BC = B'O \cdot 2\,\pi l$, etc. N.° 687

$\therefore$ área engendrada por $ABCDE = AE \cdot 2\,\pi l = 2\,\pi ld.$

Represéntese esta superficie por S', y supóngase que el número de lados aumenta indefinidamente.

S' tiende hacia S como límite,

y l tiende hacia r; N.° 377

$\therefore 2\,\pi ld$ tiende hacia $2\,\pi rd.$

Ahora bien, se tiene constantemente:

$S' = 2\,\pi ld.$ N.° 687

$\therefore S = 2\,\pi rd$ (n.° 207). L.C.D.D.

689. Corolario 1.° *El área de una esfera es igual a la de cuatro círculos máximos.*

Demuéstrese esta proposición expresando d en función de r en la fórmula $S = 2\pi rd$.

Si, por ejemplo, $r = 10$ cm., $S = 4(\pi \times 10^2)$ cm.^{2} = 1256,6 cm.^{2}

690. Corolario 2.° *Las áreas de dos esferas son entre sí como los cuadrados de los radios o de los diámetros.*

Si r y r', d y d', S y S' son respectivamente los radios, diámetros y áreas de dos esferas, se tendrá: $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$, $S' = 4\pi r'^2 = \pi d'^2$. Hállese $S : S'$ en función de r y r', y también en función de d y d'.

691. Corolario 3.° *El área de una zona es igual al producto de su altura por una circunferencia máxima.*

Si se aplica el razonamiento del n.° 688 a la zona engendrada por la revolución del arco BCD, se obtiene:

$$\text{área de la zona } BCD = B'D' \cdot 2\pi r,$$

o, representando el área y la altura de la zona por S y h respectivamente,

$$S = 2\pi hr.$$

Si, por ejemplo, el radio y la altura de la zona son 10 y 5 cm. respectivamente,

$$S = (2\pi \times 5 \times 10) \text{ cm.}^2 = 314{,}16 \text{ cm.}^2$$

692. Corolario 4.° *El área de un casquete esférico es igual al área de un círculo cuyo radio es la cuerda del arco generador del casquete.*

El arco AB, al girar sobre AE, engendra un casquete.

Área del casquete $= AB' \times 2\pi r = \pi \cdot AB' \times AE$. N.° 691

Ahora bien, $AB' \times AE = \overline{AB}^2$; N.° 298

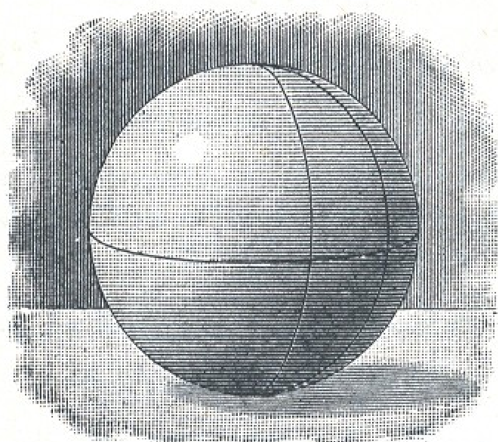
$\therefore$ área del casquete $= \pi \cdot \overline{AB}^2$.

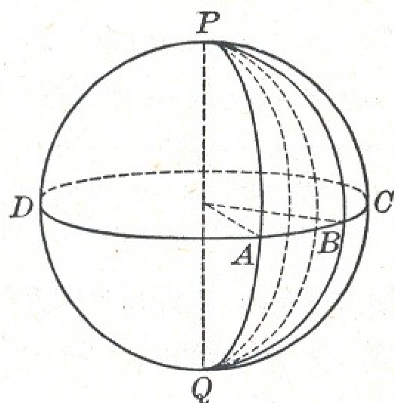
693. Exceso esférico de un triángulo esférico. Llámase *exceso esférico* de un triángulo esférico la diferencia entre la suma de los ángulos del triángulo y dos rectos, ó 180°.

Por ejemplo, si los ángulos de un triángulo esférico son 80°, 90°, 100°, el exceso esférico del triángulo es 90°.

Proposición XXV. Teorema

694. *El área de una lúnula es al área de la esfera como el ángulo de la lúnula es a 4 rectos.*





Sean *PAQB* una lúnula, *ABCD* un círculo máximo de polo *P*, *a* el ángulo de la lúnula, *S'* el área de la lúnula y *S* la de la esfera.

Demostrar que $S' : S = \text{a} : 4\,rt.$

Demostración. El $\angle a$ tiene por medida el arco AB. N.º 654

Luego arco AB : circunf. $ABCD = a : 4$ rt.

Si AB y $ABCD$ son conmensurables entre sí, supóngase que una medida común de los dos esté contenida m veces en AB y n veces en $ABCD$. Entonces

$$\text{arco } AB : \text{circunf. } ABCD = m : n;$$

$$\therefore\ a : 4 \text{ rt.} = m : n.$$

Trácense arcos de círculo máximo por P, Q y los puntos de división de $ABCD$. Estos arcos dividirán la superficie de la esfera en n lúnulas iguales, de las cuales $PAQB$ contendrá m. Luego

$$S' : S = m : n.$$

$$\therefore\ S' : S = a : 4 \text{ rt.}$$ L.C.D.D.

En el caso de inconmensurabilidad se aplica el mismo razonamiento que en el n.º 472.

EJERCICIO 107

En este ejercicio, supóngase $\pi = 3{,}1416$.

Hállense las áreas de las esferas cuyos radios son:

1. 2 m. **3.** 3,5 cm. **5.** 2,1 m. **7.** 48,8 m.

2. 3 m. **4.** 5,875 m. **6.** 3,5 m. **8.** 6500 km.

Hállense los radios de las esferas cuyas áreas son:

9. 12,5664 m.^{2} **11.** 1 cm.^{2} **13.** a.

10. 50,2656 m.^{2} **12.** $100\,\pi$ cm.^{2} **14.** $4\,\pi^3$ m.^{2}

Hállense las áreas de las zonas de una esfera de 40 cm. de diámetro, dadas las alturas siguientes en centímetros:

15. 2. **17.** 7. **19.** 1. **21.** 3,45.

16. 3. **18.** 10. **20.** 2,5. **22.** 6,83.

Dados los ángulos siguientes de varias lúnulas de una esfera de 20 cm. de diámetro, calcúlense las áreas:

23. 30°. **25.** 90°. **27.** 22° 30′. **29.** 52° 20′ 20″

24. 45°. **26.** 180°. **28.** 7° 30′. **30.** 48° 35′ 10″

31. Dos lúnulas de una misma esfera o de esferas iguales son entre sí como sus ángulos.

32. Demuéstrese que el área de una lúnula es igual a $\frac{1}{90}$ del área de un círculo máximo multiplicado por el ángulo de la lúnula, en grados.

33. Las áreas de las zonas de una misma esfera son entre sí como las alturas.

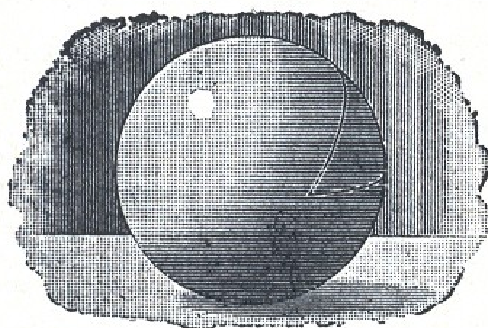
34. El radio de una esfera es de 15 cm., y el ángulo de una lúnula de ella es de 30°. Hállese el área de la lúnula.

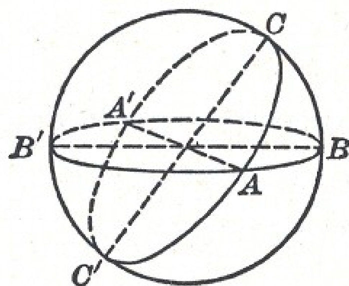
35. El ángulo de una lúnula es de 75° y el radio es de 16 cm. Calcúlese el área.

36. Hállese el exceso esférico de un triángulo trirrectángulo

Proposición XXVI. Teorema

695. *Todo triángulo esférico es equivalente a una lúnula cuyo ángulo es la mitad del exceso esférico del triángulo.*





Sea ABC un triángulo esférico de una esfera de área S.

Demostrar que ABC es equivalente a una lúnula cuyo ángulo es igual a $\frac{1}{2}(A+B+C-180°)$.

Demostración. Prolónguense los lados del triángulo hasta formar círculos completos.

Los $\triangle\triangle AB'C'$ y $A'BC$ son equivalentes; N.° 674

$\therefore$ lúnula $ABA'C = \triangle ABC + \triangle AB'C'$

Pero $\triangle CB'A + \triangle AC'B + \triangle AB'C' + \triangle ABC = \frac{1}{2}S$

$$\therefore (\text{lúnula } BCB'A - \triangle ABC) + (\text{lúnula } CAC'B - \triangle ABC) + \text{lúnula } ABA'C = \tfrac{1}{2}S;$$

$$\therefore 2\triangle ABC = \text{lúnula } BCB'A + \text{lúnula } CAC'B + \text{lúnula } ABA'C - \tfrac{1}{2}S;$$

$$\therefore \triangle ABC = \tfrac{1}{2}(\text{lúnula } BCB'A + \text{lúnula } CAC'B + \text{lúnula } ABA'C - \tfrac{1}{2}S)$$

Pero $\frac{1}{2}S =$ una lúnula de ángulo de 180° N.° 694

$\therefore \triangle ABC =$ una lúnula de ángulo de

$\frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C - 180°)$ L.C.D.D

Puesto que sabemos ya hallar el área de una lúnula (n.° 694), el teorema anterior nos enseña a calcular la de un triángulo esférico de ángulos dados

696. Corolario. *Si dos arcos de círculo máximo se cortan dentro de otro círculo máximo, la suma de las áreas de los dos triángulos esféricos opuestos que forman con él es igual a la de una lúnula cuyo ángulo es el formado por los dos arcos.*

697. Cálculo del área. Como aplicación del teorema XXVI, calculemos el área de un triángulo esférico cuyos ángulos son de 110°, 100°, 95°, en una esfera de 6 cm. de radio.

$$\text{Exceso} = 110° + 100° + 95° - 180°;\ \therefore \angle \text{ de la lúnula} = 62\tfrac{1}{2}°.$$

$$\text{Área de la lúnula} = \frac{62\frac{1}{2}}{360} \times \text{área de la esfera}$$

$$= \left[\frac{62\frac{1}{2}}{360} \times (4 \times 3{,}1416 \times 6^2)\right] \text{cm.}^2$$

$$= 78{,}54 \text{ cm.}^2$$

698. Exceso esférico de un polígono esférico. Llámase *exceso esférico* de un polígono esférico de n lados la diferencia entre la suma de sus ángulos y 2 rt. $\times (n - 2)$.

EJERCICIO 108

Calcúlense las áreas de los triángulos esféricos cuyos ángulos se dan a continuación, siendo d *el diámetro de la esfera:*

1. 100°, 120°, 140°, $d = 16$ cm.
2. 105°, 130°, 125°, $d = 10$ cm.
3. 127°, 132°, 90°, $d = 20$ cm.
4. 115°, 124°, 85°, $d = 30$ cm
5. 135°, 110°, 92°, $d = 40$ cm
6. 148°, 93°, 68°, $d = 25{,}8$ cm
7. 115° 27′ 30″, 102° 32′ 48″, 68° 27′ 39″, $d = 12800$ km.

Calcúlense las áreas de los triángulos esféricos cuyos ángulos se dan a continuación, siendo r *el radio de la esfera:*

8. 120°, 100°, 90°, $r = 9$ cm.
9. 130°, 90°, 80°, $r = 10$ cm.
10. 105°, 75°, 65°, $r = 18$ cm.
11. 115°, 102°, 30°, $r = 36$ cm
12. 140°, 120°, 85°, $r = 90$ cm.
13. 136°, 117°, 93°, $r = 1{,}8$ cm.

Calcúlense las áreas de los triángulos esféricos cuyos ángulos son los siguientes, en esferas cuyas circunferencias son los valores dados para C:

14. 93°, 94°, 120°, $C = 31{,}416$ cm.

15. 82°, 105°, 98°, $C = 62{,}832$ cm.

16. 148°, 27°, 125°, $C = 15{,}708$ cm.

17. 162°, 39°, 120°, $C = 78{,}54$ cm.

18. 149°, 41°, 116°, $C = 39{,}27$ cm.

19. 126° 30′ 42″, 105° 26′ 15″, 63° 15′ 3″, $C = 314{,}16$ cm.

20. Suponiendo que la tierra es una esfera de 6400 km. de radio, ¿cuál es el área de un triángulo cuyos vértices son el polo norte y dos puntos del ecuador cuya distancia abarca 53°?

21. Dos esferas tienen radios de 4 y 6 cm. respectivamente, y sus centros distan 5 cm. entre sí. Calcúlese el área del círculo en que se cortan.

22. La distancia de un plano de corte al centro de una esfera de 5 cm. de diámetro es de 1 cm. Hállese el radio de la sección determinada por el plano.

23. Los radios de dos esferas concéntricas son r y r'. Se pide el área de la sección determinada en la esfera exterior por un plano tangente a la interior.

24. Los puntos A y B distan entre sí 8 m. Hállese el lugar de los puntos del espacio que distan 5 m. de A y 7 m. de B.

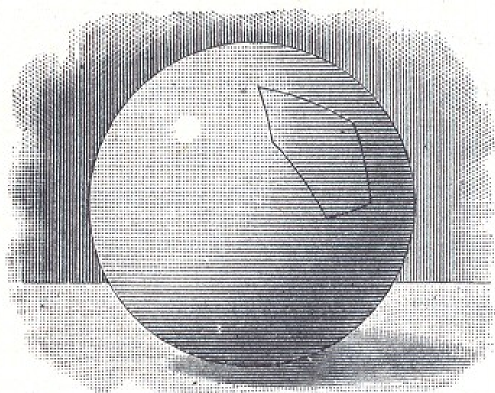
25. Los puntos A y B distan entre sí 10 m. Hállese el lugar de los puntos del espacio que distan 7 m. de A y 3 m. de B.

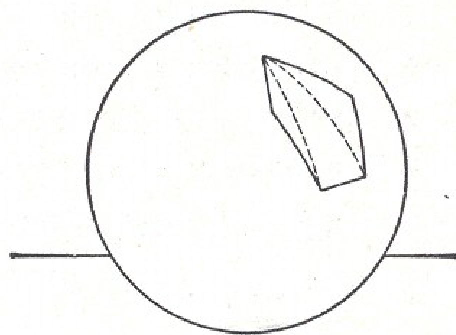
26. Dados los radios a y b de dos círculos paralelos de una esfera, y la distancia d entre sus planos, hállese el radio de la esfera.

27. El diámetro de cierta esfera es $\sqrt{2}$. Los arcos de un triángulo esférico de ella tienen por cuerdas 1, 1 y $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Se pide el área del triángulo.

PROPOSICIÓN XXVII. TEOREMA

699. *Todo polígono esférico es equivalente a una lúnula cuyo ángulo es la mitad del exceso esférico del polígono*





Sean s la suma de los ángulos de un polígono esférico de n lados, y S el área del polígono.

Demostrar que S es equivalente a una lúnula que tiene por ángulo $\frac{1}{2}[s - 180° \times (n-2)]$.

Demostración. Trácense por un vértice todas las diagonales. El polígono queda dividido en $(n-2)$ triángulos.

Cada uno de ellos es equivalente a una lúnula cuyo ángulo es la mitad del exceso del triángulo. N.° 695

Luego los $(n-2)$ triángulos son equivalentes a una lúnula cuyo ángulo es la mitad de la suma de los excesos de ellos; esto es,

$$S = \text{lúnula cuyo ángulo es } \tfrac{1}{2}[s - 180° \times (n-2)].$$ L.C.D.D.

700. Cálculo del área. Sea calcular el área de un polígono esférico cuyos ángulos son 100°, 110°, 120° y 170°, siendo de 6 cm. el radio de la esfera.

$$\text{Exceso} = 100° + 110° + 120° + 170° - 180° \times 2 = 140°.$$

$$\angle \text{ de la lúnula} = \tfrac{1}{2}\, 140° = 70°.$$

$$\text{Área de la lúnula} = \tfrac{70}{360} \times 4\pi r^2$$

$$= [\tfrac{70}{360} \times (4 \times 3{,}1416 \times 6^2)] \text{ cm.}^2$$

$$= 87{,}965 \text{ cm.}^2$$

EJERCICIO 109

Hállense las áreas de los polígonos esféricos cuyos ángulos se dan a continuación, siendo S el área de la esfera:

1. 30°, 90°, 120°, 130°, $S = 2$ m.²

2. 45°, 60°, 100°, 165°, $S = 288$ cm.²

3. 70°, 168°, 92°, 120°, $S = 500$ cm.²

4. 68° 30′, 149° 50′, 96° 54′, 136° 52′, $S = 750$ cm.²

5. 122°27′40″, 130°32′50″, 98°31′30″, 96°48′, $S = 600$ cm.²

6. 132°, 96°, 154°, 120°, 150°, $S = 552$ cm.²

7. 130°, 156°, 172°, 95°, 120°, 100°, $S = 157{,}2$ cm.²

Hállense las áreas de los polígonos esféricos cuyos ángulos se dan a continuación, siendo r *el radio de la esfera:*

8. 130°, 150°, 80°, 90°, $r = 10$ cm.

9. 148°, 157°, 90°, 100°, 120°, $r = 20$ cm.

10. 172°, 169°, 86°, 141°, 100°, 90°, $r = 24$ cm.

11. 135° 30′, 148° 42′, 96° 37′, 102° 11′, $r = 10$ cm.

Hállense las áreas de los polígonos esféricos cuyos ángulos se dan a continuación, siendo d *el diámetro de la esfera:*

12. 148°, 92°, 60°, 120°, $d = 10$ cm.

13. 172°, 168°, 93°, 37°, 100°, $d = 22$ cm.

14. 102°, 162°, 139°, 141°, 138°, 126°, $d = 20$ cm.

15. 82°50′42″, 120°29′18″, 98°37′15″, 141°22′45″, $d = 20$ m.

Hállense las áreas de los polígonos esféricos cuyos ángulos se dan a continuación, siendo C la circunferencia máxima:

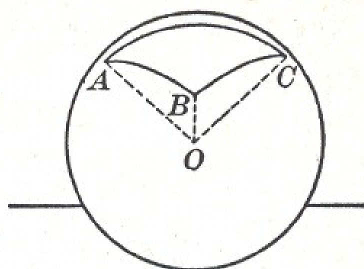
16. 39°, 148°, 172°, 168°, $C = 3{,}1416$ m.

17. 128°, 92°, 168°, 109°, $C = 31{,}416$ m.

18. 146°, 129°, 102°, 137°, 100°, $C = 6{,}2832$ m.

19. 128°, 145°, 139°, 82°, 161°, 137°, $C = 18{,}85$ m.

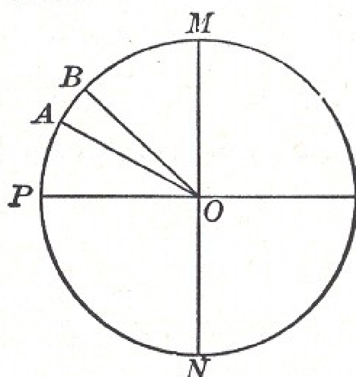
701. Pirámide esférica. Llámase *pirámide esférica* un sólido limitado por un polígono esférico y los planos de sus lados.

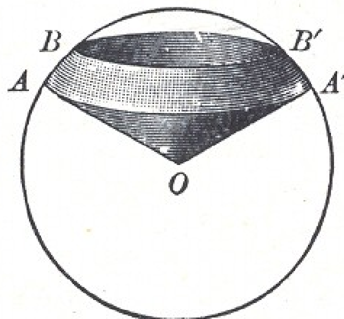


O-ABC es una pirámide esférica. El centro *O* de la esfera es el *vértice* de la pirámide; el polígono esférico *ABC*, la *base*.

702. Sector esférico. Llámase *sector esférico* el sólido engendrado por la revolución de un sector circular alrededor de un diámetro cualquiera.

Si el sector *AOB* gira sobre el diámetro *MN*, engendra el sector *AB-O-A'B'*.





La zona engendrada por el arco *AB* del sector circular generador se llama *base* del sector esférico.

La definición anterior es la de Legendre y otros autores. Algunos limitan la definición al sector cuya base es una zona de una sola base, o sea, un casquete. Cosa análoga se aplica a la definición de *segmento esférico*.

Es preciso tener en cuenta estas y otras diferencias relativas a definiciones, pues de otro modo puede creerse que varios autores se contradicen entre sí en el enunciado de ciertos teoremas.

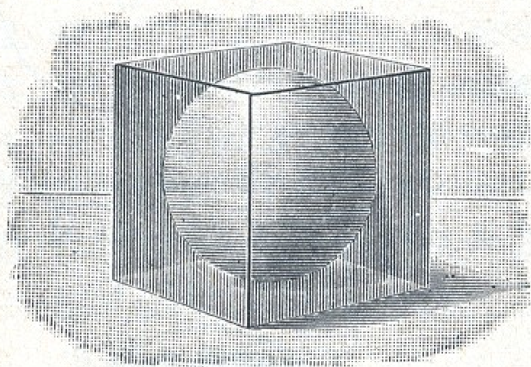
703. Segmento esférico. Llámase *segmento esférico* la porción de una esfera comprendida entre dos secciones paralelas.

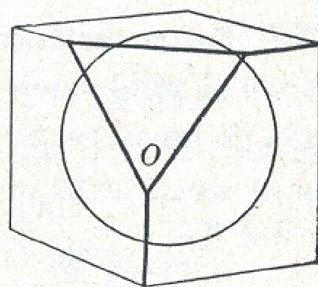
Estas secciones son las *bases* del segmento, y la distancia entre ellas es la *altura*.

704. Cuña esférica. Llámase *cuña esférica* un sólido limitado por una lúnula y los planos de los dos círculos máximos que la determinan.

Proposición XXVIII. Teorema

705. *El volumen de una esfera es igual a un tercio del producto del área por el radio.*





Sean O el centro, r el radio, S el área, y V el volumen de una esfera.

Demostrar que $V = \frac{1}{3} Sr$.

Demostración. Circunscríbase a la esfera un cubo, cuya arista será igual a $2r$.

Únase el centro O con todos los vértices del cubo.

Las rectas así trazadas son las aristas de seis pirámides, todas las cuales tienen una misma altura r, y cada una de las cuales tiene por base una de las caras del cubo.

El volumen de cada pirámide es $\frac{1}{3} r$ multiplicado por una cara del cubo, y el de las seis, o sea el del cubo, es el producto del área total del cubo por $\frac{1}{3} r$.

Por los puntos en que las aristas de las pirámides encuentran la superficie de la esfera, trácense planos tangentes a la esfera. Obtiénese así un poliedro circunscrito cuyo volumen es mayor que el de la esfera pero difiere menos de éste que el volumen del cubo.

Únase como antes el centro O con los vértices del poliedro. Las rectas de unión son aristas de pirámides de altura r y cuyas bases son las caras del poliedro. N.° 646

La suma de los volúmenes de estas pirámides sera igual al producto de la suma de las caras del poliedro por $\frac{1}{3}r$. Representándola por V', y el área del poliedro por S', se tiene:

$$V' = \tfrac{1}{3}S'r.$$

Si se repite el procedimiento, se obtendrá un poliedro cuyo volumen se aproximará más al de la esfera.

Aumentando así indefinidamente el número de caras del poliedro, el volumen, que disminuye constantemente sin dejar de ser mayor que el de la esfera, puede hacerse diferir de éste en menos de cualquier cantidad dada, por pequeña que sea. Otro tanto puede decirse del área del poliedro comparada con la de la esfera. Así pues,

V' tiende hacia el límite V,

y S' hacia el límite S; N.° 204

y como V' es siempre igual a $\frac{1}{3}S'r$,

síguese que

$$V = \tfrac{1}{3}Sr \text{ (n.° 207).}$$ L.C.D.D.

706. Corolario 1.° *El volumen de una esfera de radio* r *y diámetro* d *es igual a* $\frac{4}{3}\pi r^3$ *y a* $\frac{1}{6}\pi d^3$.

Demuéstrese esta proposición expresando S' en función de r o de d.

707. Corolario 2.° *Los volúmenes de dos esferas son entre sí como los cubos de los radios.*

¿Cuál es la relación de $\frac{4}{3}\pi r^3$ a $\frac{4}{3}\pi r'^3$?

¿Aplícase el mismo principio a los diámetros?

708. Corolario 3.° *El volumen de un sector esférico es igual a un tercio del producto del área de la base del sector por el radio de la esfera.*

Supóngase la base dividida en triángulos esféricos. Los planos determinados por los vértices determinan las bases de pirámides cuyo vértice común es O. ¿Cuál es el límite de la suma de los volúmenes de estas pirámides cuando sus bases se disminuyen indefinidamente?

EJERCICIO 110

PROBLEMAS DE CÁLCULO

Hállense los volúmenes de las esferas cuyos radios son:

1. 3 cm. **4.** 2,5 m. **7.** 20,7 m.
2. 5 cm. **5.** 4,375 m. **8.** 2,25 m.
3. 7 cm. **6.** 9,875 m. **9.** 6400 km.

Hállense los volúmenes de las esferas cuyos diámetros son:

10. 24 cm. **13.** 2,8 cm. **16.** 2,3 m.
11. 36 cm. **14.** 3,4 cm. **17.** 3,3 m.
12. 48 cm. **15.** 4,5 cm. **18.** 8,5 m.

Hállense los volúmenes de las esferas cuyas circunferencias máximas son:

19. 6,2832 m. **20.** 12,5664 m. **21.** 18,8496 m.

Hállense los volúmenes de las esferas cuyas áreas son:

22. 12,5664 m.^{2} **23.** 50,2656 m.^{2} **24.** 113,0976 m.^{2}

Hállense los radios de las esferas cuyos volúmenes son:

25. 4,1888 m.^{3} **26.** 33,5104 m.^{3} **27.** 113,0976 m.^{3}

28. ¿Cuántos metros cuadrados de plomo se necesitan para revestir una cúpula hemisférica de 19,8 m. de circunferencia?

29. ¿Cuánto cuesta dorar una bola de 1,8 m. de diámetro, a 2 centavos por cm.^{2}?

30. Los diedros de una pirámide esférica son de 80°, 100°, 120° y 150°. Radio de la esfera, 12,6 m. Hállese el área de la base.

31. Los diedros de una pirámide esférica son de 60°, 80° y 10° El área de la base es 4π m.^{2} Hállese el radio de la esfera.

32. Suponiendo que la tierra es una esfera de 12 750 km. de diámetro, ¿cuál es el área de su superficie?

33. La altura de la zona tórrida es de 5100 km. ¿Cuál es el área?

34. La altura de la zona templada norte es de 2900 km. ¿Cuál es el área?

35. ¿Cuál es el área de la superficie del mar que puede verse de un aeroplano a una elevación de 450 m.?

36. ¿Qué distancia en el mar puede abarcarse con la vista desde la cubierta de un buque, hallándose ésta a 12 m. del agua?

37. ¿Desde qué altura puede verse un sexto de la superficie terrestre?

38. ¿Qué área de la superficie terrestre puede verse desde una altura igual al radio?

39. Suponiendo que la altura de la atmósfera es de 80 km., ¿cuál es el volumen?

40. El diámetro exterior de una esfera hueca de hierro es de 50 cm.; el espesor, de 5 cm. Hállese el peso, suponiendo que el del hierro es de 7200 kg. por $m.^3$

41. ¿Cuál es el ángulo de una cuña esférica cuyo volumen es de 1,25 $m.^3$, si el volumen de la esfera es de 8,75 $m.^3$?

42. El interior de una palangana de 20 cm. de profundidad tiene la forma de un casquete esférico. El diámetro de la parte superior es de 40 cm. ¿Cuántos litros de agua puede contener?

43. Demuéstrese que el volumen de una pirámide esférica es igual a un tercio del producto de la base por el radio, y hállese el volumen suponiendo que el radio es de 10 cm. y que el área de la base es un octavo del área de la esfera.

44. Exprésese el volumen de un sector esférico en que el área de la base es S, siendo r el radio de la esfera.

EJERCICIO 111

1. Hállese el área S del casquete de una esfera de radio r iluminado por una luz cuya distancia a la superficie de la esfera es a.

2. Exprésese el volumen V de una esfera en función de la circunferencia máxima C.

3. Exprésese el radio r de una esfera en función de V, el volumen.

4. Exprésese el diámetro d de una esfera en función de S, el área.

5. Exprésese la circunferencia C de una esfera en función de S, el área.

6. Exprésese la altura h de una zona en función del área S de la zona y el volumen V de la esfera.

7. Exprésese el volumen V de una pirámide esférica en función del área b de la base y el radio r de la esfera. Despéjense luégo r y b.

8. Hállese la fórmula para calcular el volumen del material contenido en una esfera hueca cuyo radio interior es r y cuyo espesor es e.

9. Hállese la fórmula para calcular el peso de una esfera como la anterior, llamando p el peso del material por unidad de volumen.

10. Exprésese la altura h de una zona en función del área S de la zona y el radio r de la esfera.

11. Exprésese el diámetro d de una esfera en que el área de una zona de altura h es S.

12. Hállese el área S' de una zona de altura h en una esfera de área S.

13. Exprésese el área S de la parte de una esfera de diámetro d que puede verse desde un punto cuya distancia al centro de la esfera es a.

EJERCICIO 112

PROBLEMAS SOBRE LUGARES GEOMÉTRICOS

Hállese el lugar de los puntos situados:

1. A una distancia dada de un punto dado.

2. A una distancia dada de una recta dada.

3. A una distancia dada de un plano dado.

4. A una distancia dada de una superficie cilíndrica dada.

5. A una distancia dada de una superficie esférica dada.

6. A una misma distancia de dos puntos dados.

7. A una misma distancia de dos planos dados.

8. A una distancia dada de un punto dado, y a otra distancia dada de una recta dada.

9. A una distancia dada de un punto dado, y a otra distancia dada de un plano dado.

10. A una distancia dada de un punto dado y equidistantes de otros dos puntos dados.

11. A una distancia dada de un punto dado y equidistantes de dos planos dados.

Hállense uno o dos puntos situados:

12. A las distancias d_1, d_2, d_3 de un punto dado, de una recta dada y de un plano dado.

13. A las distancias d_1 y d_2 respectivamente de un punto dado y un plano dado, y a una misma distancia de otros dos planos dados.

14. Equidistantes de dos puntos dados, equidistantes de dos planos dados, y a la distancia r de un punto dado.

15. Hállese el lugar geométrico de los centros de las esferas que son tangentes a dos planos dados y pasan por dos puntos dados interiores al diedro de los planos.

EJERCICIO 113

PROBLEMAS Y TEOREMAS VARIOS

1. El volumen de una esfera es al volumen del cubo inscrito como π es a $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.

2. El volumen de una esfera es al del cubo circunscrito como π es a 6.

3. ¿En qué relación están el volumen del cubo inscrito y el del circunscrito?

4. Dada una esfera de 20 cm. de diámetro, hállese la diferencia entre los volúmenes de los cubos inscrito y circunscrito.

5. Los planos que pasan por las bisectrices de las caras de un triedro y son perpendiculares a los planos del triedro se cortan en una misma recta.

6. Los planos que pasan por las aristas de un triedro y son perpendiculares a los planos de las caras opuestas se cortan en una misma recta.

7. La altura de todo tetraedro regular es igual a la suma de las perpendiculares bajadas a las caras desde un punto interior cualquiera.

8. Dado un ángulo tetraedro, trazar un plano de corte tal que la sección sea un paralelogramo.

9. Hállese la relación entre los volúmenes de los sólidos engendrados por la revolución de un rectángulo sobre sus dos lados a y b.

10. Un prisma y un tronco de pirámide cuadrada tienen ambos altura de 7,2 m. Las bases del tronco tienen respectivamente 6 y 4,8 m. por lado; la del prisma es la sección del tronco hecha por un plano equidistante de las bases. Hállese la diferencia entre los dos volúmenes.

11. Por el vértice de un triedro, trazar una recta que forme ángulos iguales con las aristas.

12. Las rectas trazadas de los vértices de un tetraedro a los puntos de intersección de las medianas de las caras opuestas se encuentran en un punto. El segmento menor de cada recta es $\frac{1}{4}$ de la recta entera. (El punto así determinado es el *centro de gravedad* del tetraedro.)

13. Las rectas que unen los puntos medios de las aristas opuestas de un tetraedro pasan por el centro de gravedad, el cual las bisecta.

14. El plano bisector de un diedro de un tetraedro divide la arista opuesta en segmentos proporcionales a las áreas de las caras del diedro.

15. Explíquese cómo se puede hacer en un cubo una sección de forma exagonal regular.

16. El volumen de un cilindro de revolución es igual a la mitad del producto del área lateral por el radio.

17. Demuéstrese que el volumen de un cilindro de revolución es igual al producto del área del rectángulo generador por la circunferencia engendrada por el punto de intersección de las diagonales.

18. Si el diámetro y la altura de un cilindro de revolución son iguales, el volumen es igual a un tercio del producto del área total por el radio.

19. El área de una esfera es dos tercios de la total del cilindro circunscrito.

20. El volumen de una esfera es dos tercios del volumen del cilindro circunscrito.

21. Tiénense una esfera, el cilindro circunscrito, y un cono de dos hojas inscrito en el cilindro. Demuéstrese que si se trazan dos planos cualesquiera perpendiculares al eje común de los tres sólidos, el segmento esférico que determinan es equivalente a la diferencia entre los segmentos correspondientes del cilindro y el cono.

EJERCICIO 114

Cuestionario de repaso

1. ¿Cómo se engendra una esfera?

2. ¿Qué basta y es necesario para que dos esferas sean iguales?

3. ¿Qué forma tiene toda sección plana de una esfera? ¿Se puede decir otro tanto del cono?

4. ¿Cuándo son iguales dos secciones planas de una esfera?

5. ¿Qué es círculo máximo?

6. ¿Qué es plano tangente a una esfera? Enúnciense algún teorema relativo a todo plano tangente a una esfera, y el teorema correspondiente de la geometría plana.

7. Complétese este enunciado: *Toda esfera es inscriptible en* ... ¿Cuál es el teorema correspondiente de la geometría plana?

8. Complétese este enunciado: *Toda esfera es circunscriptible a* ... ¿Cuál es el teorema correspondiente de la geometría plana?

9. Complétese este enunciado: ... *puntos no situados en un mismo plano determinan una esfera.* ¿Cuál es la proposición correspondiente de la geometría plana?

10. ¿Hacia qué límite tiende la suma de los lados de un polígono esférico? ¿Cuáles son los límites de la suma de los ángulos de un triángulo esférico?

11. ¿Qué es triángulo polar? Enúnciense dos teoremas relativos a los triángulos polares.

12. ¿Qué son triángulos esféricos simétricos? Enúnciense dos teoremas relativos a ellos.

13. Enúnciense dos teoremas sobre los triángulos esféricos iguales.

14. ¿Cómo se calcula el área de un polígono esférico?

APÉNDICE

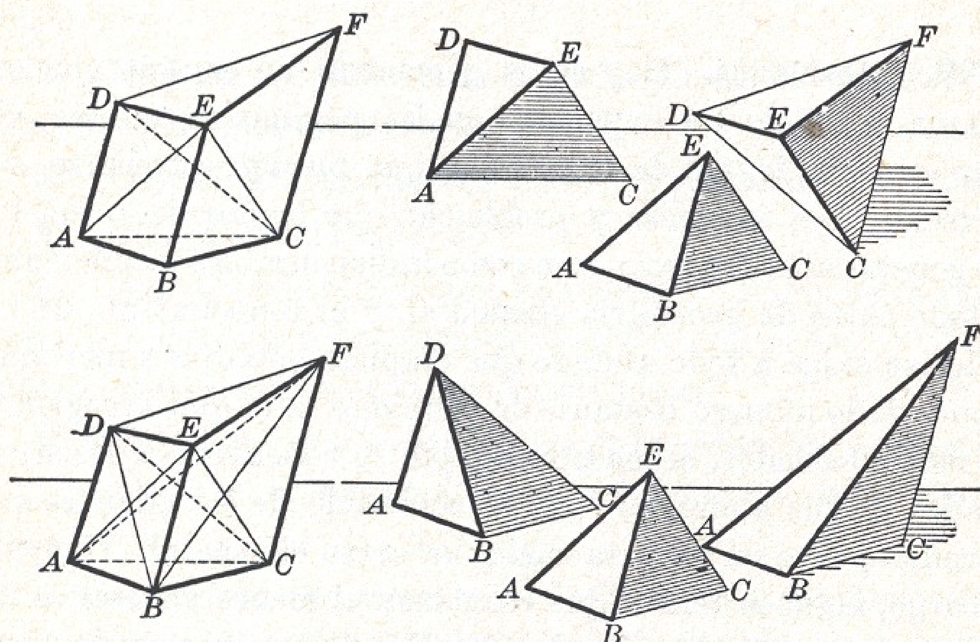
709. Introducción. Hay en la geometría del espacio muchos asuntos, fuera de los expuestos en las páginas anteriores, así como en otros textos de enseñanza, que pueden estudiarse con provecho. Los teoremas y problemas que hemos dado son los que generalmente se reconocen como indispensables y suficientes en todo curso de geometría elemental, y el conocimiento de los cuales se exige a todo alumno que empieza estudios superiores. Hemos dado número bastante de ejercicios para que, escogiendo los más adecuados, el maestro adapte su enseñanza a las necesidades de sus alumnos, y así el contenido de las páginas que preceden puede servir para cualquier curso elemental. Hay, sin embargo, algunos textos que contienen al menos generalidades sobre otros asuntos, casi todos detalles de los ya tratados, que se consideran de importancia, y a los cuales se consagrarán las páginas siguientes.

Son éstos varios teoremas relativos a la medida de los sólidos y a los poliedros semejantes. También hemos agregado un bosquejo de la historia de la geometría, el cual, si bien no indispensable para el aprendizaje y la inteligente aplicación de los principios geométricos, es tema interesante cuyo estudio aumenta y pule la educacción del alumno. Damos además al final, como amena recreación, algunos sofismas geométricos célebres, que a la vez divierten e instruyen.

710. Poliedros semejantes. Dos poliedros son *semejantes* cuando tienen un mismo número de caras, todas semejantes respectivamente y semejantemente dispuestas, y los ángulos poliedros del uno son iguales a los correspondientes del otro

Proposición I. Teorema

711. *Un prisma truncado triangular es equivalente a la suma de tres pirámides cuya base común es la del prisma y cuyos vértices son los de la sección inclinada.*



Sea *ABC* la base de un prisma triangular truncado *ABC-DEF*, dividido en las tres pirámides *E-ABC, E-ACD, E-CFD.*

Demostrar que el volumen de ABC-DEF es igual a la suma de los volúmenes de las tres pirámides triangulares E-ABC, D-ABC, F ABC.

Demostración. La pirámide *E-ABC* tiene por base la del prisma y por vértice el *E* de la sección inclinada. Basta pues analizar las otras dos pirámides.

Puesto que *E-ACD* y *B-ACD* tienen base común y sus vértices están en la recta *EB* ∥ a la base, lo cual hace iguales sus alturas,

E-ACD = (en volumen) *B-ACD*, N.º 558

La pirámide *B-ACD* puede considerarse como una pirámide de base *ABC* y vértice *D*, y llamarse pirámide *D-ABC*

Como los dos ⚠ CFD y ACF tienen la base común CF y alturas iguales, puesto que sus vértices están en la ∥ AD a CF, dichos ⚠ son equivalentes.

Además, las pirámides $E\text{-}CFD$ y $B\text{-}ACF$ no sólo tienen bases equivalentes, sino que tienen también igual altura, puesto que sus vértices E y B están en la recta EB, ∥ a las bases. Así pues

$$E\text{-}CFD = B\text{-}ACF.$$

Pero la pirámide $B\text{-}ACF$ puede también considerarse como una pirámide de base ABC y vértice F, y por consiguiente llamarse pirámide $F\text{-}ABC$.

Luego finalmente el prisma triangular truncado $ABC\text{-}DEF$ es equivalente a la suma de las tres pirámides triangulares $E\text{-}ABC$, $D\text{-}ABC$ y $F\text{-}ABC$. L. C. D. D

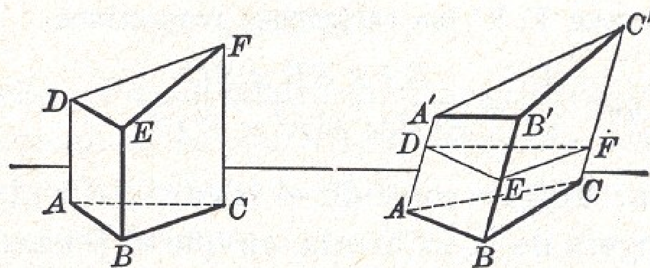


FIG. 1 FIG. 2

712. CorolaRIO 1.° *El volumen de un prisma triangular recto truncado es igual a un tercio del producto de la base por la suma de las aristas laterales.*

En efecto, las aristas laterales DA, EB, FC (fig. 1) son perpendiculares a la base ABC, y por tanto son las alturas de las tres pirámides a que el prisma es equivalente.

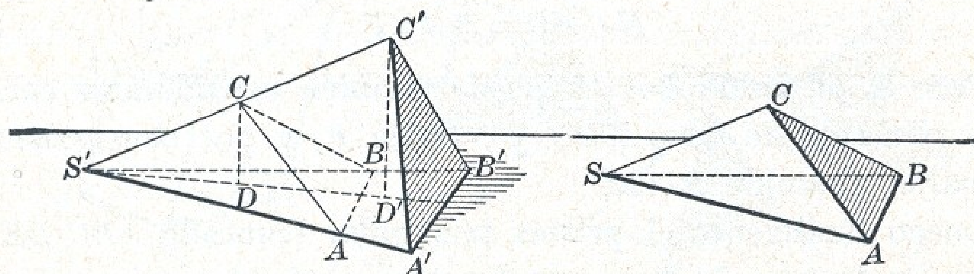
¿Qué sucede cuando la base ABC es paralela a la sección DEF?

713. CorolaRIO 2.° *El volumen de un prisma triangular truncado es igual a un tercio del producto de la sección recta por la suma de las aristas laterales.*

En efecto, la sección recta DEF (fig. 2) divide el prisma truncado en dos prismas rectos truncados.

PROPOSICIÓN II. TEOREMA

714. *Si un triedro de un tetraedro es igual a un triedro de otro, los volúmenes de los dos tetraedros son entre sí como los productos de las tres aristas de los dos triedros iguales.*



Sean S-ABC, S'-$A'B'C'$ dos tetraedros en que los triedros S y S' son iguales; y sean V, V' los volúmenes respectivos.

Demostrar que $\frac{V}{V'} = \frac{SA \times SB \times SC}{S'A' \times S'B' \times S'C'}$.

Demostración. Hágase coincidir el triedro S con el S', como se indica en la figura de la izquierda, en que el tetraedro S'-ABC representa la nueva posición del S-ABC.

Trácense CD y $C'D'$ ⊥s al plano $S'A'B'$,

y sea $S'DD'$ la intersección de su plano con $S'A'B'$.

Las caras $S'AB$ y $S'A'B'$ pueden tomarse por bases, y CD y $C'D'$ por alturas, de las pirámides C-$S'AB$, C'-$S'A'B'$ respectivamente

Se tiene: $\frac{V}{V'} = \frac{S'AB \times CD}{S'A'B' \times C'D'} = \frac{S'AB}{S'A'B'} \times \frac{CD}{C'D'}$. N.º 562

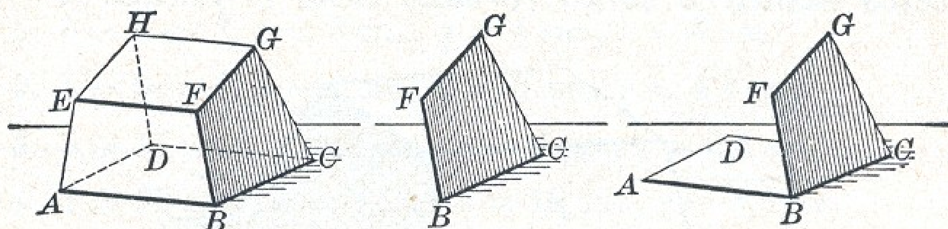
Ahora bien, $\frac{S'AB}{S'A'B'} = \frac{S'A \times S'B}{S'A' \times S'B'}$, N.º 332

y además $\frac{CD}{C'D'} = \frac{S'C}{S'C'}$. N.º 282

$$\therefore \frac{V}{V'} = \frac{S'A \times S'B \times S'C}{S'A' \times S'B' \times S'C'} = \frac{SA \times SB \times SC}{S'A' \times S'B' \times S'C'}.$$ L. C. D. D.

Proposición III. Teorema

715. *En todo poliedro, el número de aristas más 2 es igual al número de vértices más el número de caras.*



Sea AG un poliedro de c caras, y sean en general a el número de lados o de aristas y v el de vértices de una figura cualquiera.

Demostrar que, en el poliedro AG,

$$a + 2 = v + c.$$

Demostración. Principiando con la cara $BCGF$, se tiene : $a = v$. Si se agrega ahora la cara $ABCD$, haciendo coincidir una de sus aristas con una de la primera cara, se obtiene una figura de dos caras que tienen comunes *una* arista BC y *dos* vértices B y C.

Por tanto, en esta figura, $a = v + 1$.

Agréguese otra cara $ABFE$ que quede contigua a las dos primeras. Esta cara tendrá *dos* aristas, AB, BF, y *tres* vértices, A, B, F, en común con la figura antes formada.

Por tanto, para tres caras, $a = v + 2$.

Asímismo, para cuatro, $a = v + 3$,

y en general, para $(c - 1)$, $a = v + (c - 2)$.

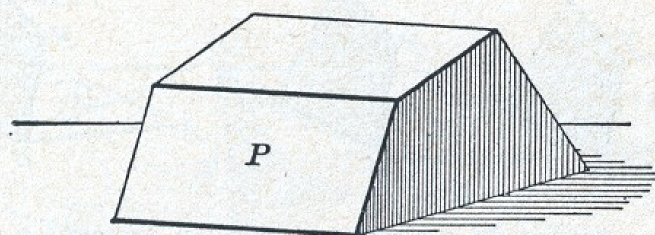
Ahora bien, $(c - 1)$ es el número de caras del poliedro menos una. Al agregar ésta no se aumentan el número de aristas ni el de vértices. Luego, para las c caras del poliedro,

$$a = v + (c - 2); \text{ de donde } a + 2 = v + c. \quad \text{L.C.D.D.}$$

Este teorema se debe al célebre matemático suizo Euler.

Proposición IV. Teorema

716. *La suma de los ángulos formados en los vértices de un poliedro por las aristas es igual a tantas veces 4 rectos menos 2 como vértices tiene el poliedro.*



Sea P un poliedro de a aristas, v vértices y c caras; y sea s la suma de los ángulos que las aristas forman en los vértices.

Demostrar que $s = 4 \text{ rt.} \times (v - 2)$.

Demostración. Puesto que a es el número de aristas del poliedro, $2a$ representa el número de lados de las caras, considerando cada una como polígono separado; pues cada arista es común a dos polígonos.

Si en cada vértice de cada polígono se forma un ángulo externo, la suma de los ángulos interno y externo en cada vértice es 2 rt.; y como hay $2a$ vértices, la suma de todos estos ángulos es

$$2 \text{ rt.} \times 2a, \text{ ó } 4 \text{ rt.} \times a.$$

Como la suma de los ángulos externos de cada polígono es 4 rt. (n.º 146), la de c polígonos es 4 rt. $\times\, c$. Luego

$$s = 4 \text{ rt.} \times a - 4 \text{ rt.} \times c = 4 \text{ rt.} \times (a - c).$$

Ahora bien, $$a + 2 = v + c, \qquad \text{N.º 715}$$

y por tanto $$a - c = v - 2.$$

$$\therefore s = 4 \text{ rt.} \times (v - 2). \qquad \text{L.C.D.D.}$$

¿Cuál es el análogo del teorema anterior en la geometría plana?

EJERCICIO 115

Hállense los volúmenes de los prismas triangulares truncados en que la base b *y las distancias* p, q, r *de los vértices de la sección inclinada al plano de la base son:*

1. $b = 8$ cm.^{2}, $p = 3$ cm., $q = 4$ cm., $r = 5$ cm.

2. $b = 9$ cm.^{2}, $p = 6$ cm., $q = 3$ cm., $r = 4{,}5$ cm.

3. $b = 15$ cm.^{2}, $p = 7$ cm., $q = 9$ cm., $r = 8{,}1$ cm.

4. $b = 32$ cm.^{2}, $p = 9$ cm., $q = 12$ cm., $r = 9{,}3$ cm.

5. $b = 48$ cm.^{2}, $p = 16$ cm., $q = 15$ cm., $r = 18$ cm.

6. Una barra triangular de hierro (prisma triangular recto) se corta por un plano oblicuo de tal modo que las longitudes de los bordes son respectivamente de 90, 95 y 95 cm. La sección recta (uno de los extremos) es un triángulo equilátero de 5 cm. por lado. ¿Cuál es el peso de la barra, si el del hierro es 7500 kg. por m.^{3}?

7. Dos pirámides triangulares tienen un triedro igual. Las tres aristas que lo comprenden son de 3, 4 y 3,5 m. en la una, y de 5, 5,5 y 6 m. en la otra. Hállese la relación de los volúmenes.

8. Fórmese una tabla que contenga el número de aristas, vértices y caras de los poliedros regulares, y verifíquese en cada uno el teorema de Euler (n.° 715).

9. Indíquese en la tabla anterior la suma de los ángulos formados por las aristas en cada vértice, y verifíquese la fórmula del n.° 716.

10. Demuéstrese que no hay poliedro de siete aristas.

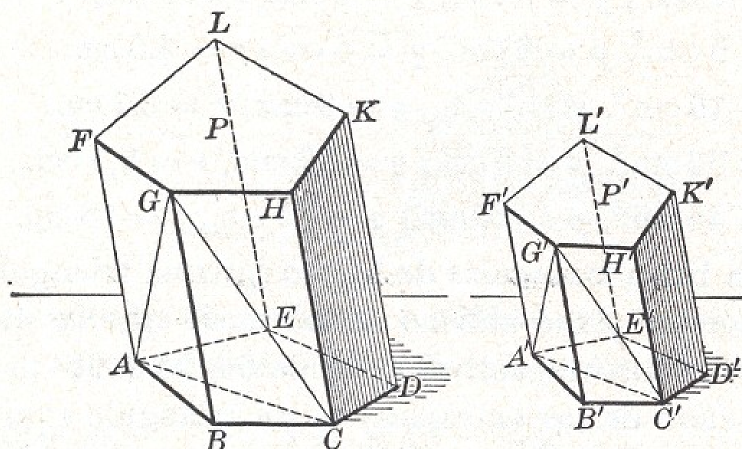
11. ¿Hay poliedro de nueve aristas?

12. Hállese *s* (n.° 716) en un poliedro de seis aristas, y dése el resultado en grados.

13. Hállese *s* en los poliedros de cuatro y cinco vértices. ¿Puede haber poliedro de tres vértices?

PROPOSICIÓN V. TEOREMA

717. *Dos poliedros semejantes pueden descomponerse en un mismo número de tetraedros semejantes respectivamente y semejantemente dispuestos.*



Sean P, P' dos poliedros semejantes.

Demostrar que P y P' pueden descomponerse en un mismo número de tetraedros semejantes respectivamente y semejantemente dispuestos.

Demostración. Sean G y G' dos vértices homólogos.

Divídanse todas las caras de P y P', menos las que forman los ángulos G y G', en triángulos por diagonales homólogas.

Trácense planos por G y las diagonales de las caras de P, y por G' y las diagonales de las caras de P'.

Dos tetraedros correspondientes cualesquiera, como $G\text{-}ABC$ y $G'\text{-}A'B'C'$, tienen caras semejantes ABC y $A'B'C'$, GAB y $G'A'B'$, GBC y $G'B'C'$. N.° 292

Puesto que

$$\frac{AG}{A'G'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{GC}{G'C'}, \qquad \text{N.° 282}$$

síguese que

GAC es semejante a $G'A'C'$. N.° 289

Los triedros de los dos tetraedros son respectivamente iguales. N.° 498

Luego G-ABC es semejante a G'-$A'B'C'$. N.° 710

Si estos dos tetraedros se quitan de los poliedros dados, los dos que quedan son también semejantes; pues las nuevas caras GAC y $G'A'C'$ son semejantes, como se acaba de demostrar, y las AGF y $A'G'F'$, GCH y $G'C'H'$ también lo son (n.° 292). Los nuevos ángulos poliedros G y G', A y A', C y C' son iguales respectivamente, pues resultan de quitar a ángulos iguales partes iguales semejantemente dispuestas.

Puede continuarse quitando tetraedros semejantes, lo cual es equivalente a dividir los dos poliedros en un mismo número de tetraedros semejantes respectivamente y semejantemente dispuestos. L. C. D. D.

718. Corolario 1.° *Las aristas homólogas de dos poliedros semejantes son proporcionales.*

En efecto, las caras correspondientes son semejantes, y por tanto los lados correspondientes son proporcionales (n.° 282).

719. Corolario 2.° *Las rectas homólogas de dos poliedros semejantes son entre sí como las aristas homólogas.*

Puede demostrarse que son lados homólogos de polígonos semejantes. Véase el n.° 282.

720. Corolario 3.° *Las caras homólogas de dos poliedros semejantes se hallan entre sí como los cuadrados de las aristas homólogas.*

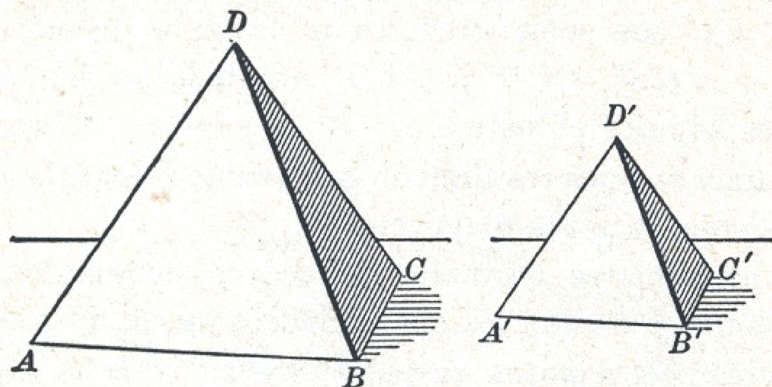
En efecto, son polígonos semejantes, a los cuales se aplica por tanto el teorema del n.° 334.

721. Corolario 4.° *Las áreas totales de dos poliedros semejantes son entre sí como los cuadrados de las aristas homólogas.*

En efecto, la relación entre dos caras homólogas es la misma que la de los cuadrados de dos aristas homólogas cualesquiera (n.° 720), y las sumas de las caras están en la misma relación (n.° 269).

PROPOSICIÓN VI. TEOREMA

722. *Los volúmenes de dos tetraedros semejantes son entre sí como los cubos de las aristas homólogas.*



Sean *D-ABC*, *D′-A′B′C′* dos tetraedros semejantes de volúmenes *V* y *V′* respectivamente.

Demostrar que $$\frac{V}{V'}=\frac{\overline{DB}^3}{\overline{D'B'}^3}.$$

Demostración. Puesto que los tetraedros son semejantes, los triedros D y D' son iguales. N.° 710

$$\frac{V}{V'}=\frac{DB\times DC\times DA}{D'B'\times D'C'\times D'A'}$$ N.° 714

$$=\frac{DB}{D'B'}\times\frac{DC}{D'C'}\times\frac{DA}{D'A'}.$$

Puesto que los tetraedros son semejantes, Hipót.

$$\frac{DB}{D'B'}=\frac{DC}{D'C'}=\frac{DA}{D'A'},$$ N.° 718

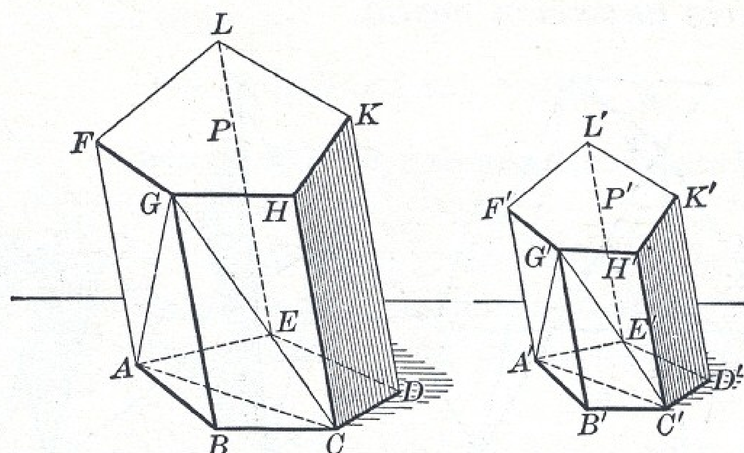
y por tanto,

$$\frac{V}{V'}=\frac{DB}{D'B'}\times\frac{DB}{D'B'}\times\frac{DB}{D'B'},$$

o sea, $$\frac{V}{V'}=\frac{\overline{DB}^3}{\overline{D'B'}^3}.$$ L.C.D.D

PROPOSICIÓN VII. TEOREMA

723. *Los volúmenes de dos poliedros semejantes son entre sí como los cubos de las aristas homólogas.*



Sean P, P' dos poliedros semejantes de volúmenes V y V'.

Demostrar que $V : V' = \overline{GB}^3 : \overline{G'B'}^3$.

Demostración. Divídanse P y P' en tetraedros semejantes semejantemente dispuestos (n.° 717). Sean V_1, $V_2 \ldots$, $V'_1 \ldots$ los volúmenes de estos tetraedros.

Puesto que

$$V_1 : V'_1 = \overline{GB}^3 : \overline{G'B'}^3,\ V_2 : V_2 = \overline{GB}^3 : \overline{G'B'}^3 \ldots, \quad \text{N.° 722}$$

síguese que

$$V_1 + V_2 + V_3 + \ldots : V'_1 + V'_2 + V'_3 + \ldots = \overline{GB}^3 : \overline{G'B'}^3. \quad \text{N.° 269}$$

Pero $V_1 + V_2 + V_3 + \ldots = V$, y $V'_1 + V_2 + V'_3 + \ldots = V'$.

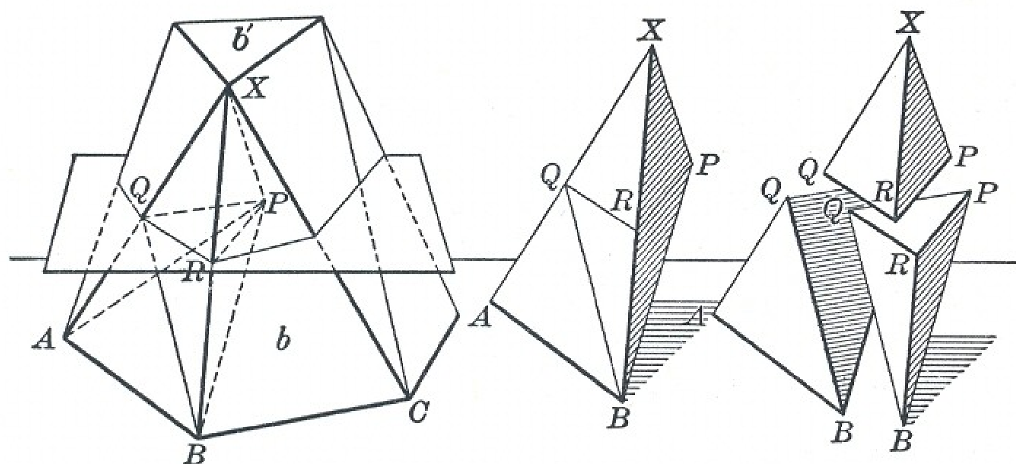
$$\therefore\ V : V' = \overline{GB}^3 : \overline{G'B'}^3. \quad \text{L.C.D.D.}$$

724. Prismatoide. Llámase *prismatoide* un poliedro que tiene dos caras paralelas, llamadas *bases*, y cuyas otras caras son triángulos o trapecios en que uno de los lados es lado de una base, y el lado o vértice opuesto se halla en la otra base.

La *altura* del prismatoide es la distancia entre las bases. Llámase *sección media* la hecha por un plano paralelo a las bases y equidistante de ellas.

Proposición VIII. Teorema

725. *El volumen de un prismatoide es igual a un sexto del producto de la altura por la suma de las bases y cuatro veces la sección media.*



Sean V el volumen, b y b' las bases, m la sección media y h la altura de un prismatoide.

Demostrar que $V = \frac{1}{6}\,\mathrm{h}\,(\mathrm{b} + \mathrm{b}' + 4\,\mathrm{m})$.

Demostración. Si hay caras trapeciales, divídanse en triángulos por diagonales.

Sea P un punto cualquiera de la sección media. Trácense de él rectas a los vértices del prismatoide y de la sección media. Divídase el prismatoide en pirámides de vértice P y cuyas bases sean respectivamente las b y b' y las caras laterales del prismatoide. Estas últimas pirámides se llamarán *pirámides laterales.*

La $P\text{-}XAB$ se compone de las tres pirámides $P\text{-}XQR$, $P\text{-}QBR$, $P\text{-}QAB$.

$P\text{-}XQR$ puede considerarse como una pirámide de vértice X y base PQR; y $P\text{-}QBR$, como una de vértice B y base PQR.

Por tanto, puesto que la altura de ambas es $\frac{1}{2}h$,

$$\text{vol. } P\text{-}XQR = \tfrac{1}{6}\,h \cdot PQR,$$

$$\text{vol. } P\text{-}QBR = \tfrac{1}{6}\,h \cdot PQR. \qquad \text{N.° } 559$$

Las pirámides $P\text{-}QAB$, $P\text{-}QBR$ tienen vértice común P. La base $QAB = 2\ QBR$ (n.° 327), puesto que la base AB del $\triangle QAB$ es dos veces la QR del QBR (n.° 136), y los dos tienen una misma altura (n.° 724).

Síguese de aquí que

$$\text{vol. } P\text{-}QAB = 2 \text{ vol. } P\text{-}QBR. \qquad \text{N.° 563}$$

Luego el volumen de $P\text{-}XAB$, que está compuesta de $P\text{-}XQR$, $P\text{-}QBR$ y $P\text{-}QAB$, es igual a $\frac{4}{6}\,h \cdot PQR$.

Asímismo, el volumen de cada pirámide lateral es igual a $\frac{4}{6}\,h$ multiplicado por la parte de la sección media que la pirámide intercepta. El volumen total de las pirámides laterales es por tanto $\frac{4}{6}\,hm$.

El volumen de la pirámide de base b es $\frac{1}{6}\,hb$, y el de la de base b' es $\frac{1}{6}\,hb'$. N.° 559

Luego finalmente

$$V = \frac{1}{6}\,h(b + b' + 4\,m). \qquad \text{L.C.D.D.}$$

EJERCICIO 116

Dedúzcanse las siguientes fórmulas como casos especiales de la que acaba de demostrarse:

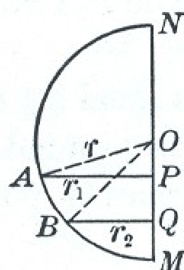
1. Cubo, $V = h^3$.
2. Prisma, $V = bh$.
3. Pirámide, $V = \frac{1}{3}\,bh$.
4. Paralelepípedo, $V = bh$.
5. Tronco de pirámide, $V = \frac{1}{3}\,h\left(b + b' + \sqrt{bb'}\right)$.

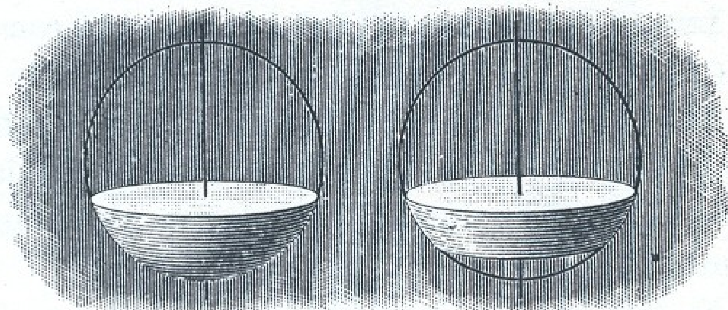
6. ¿Cuál es el volumen de un prismatoide en que las áreas de las bases son 7 cm.^{2} y 3 cm.^{2}, la de la sección media 4 cm.^{2}, y la altura 3 cm.?

7. Una cuña tiene por base un rectángulo de dimensiones p y q. El filo es de longitud l, paralelo a la base, y queda de ésta a la distancia d. Hállese una fórmula general para calcular el volumen, y aplíquese a una cuña en que $p = 6$ cm., $q = 1$ cm., $l = 5$ cm., $d = 3$ cm.

Proposición IX. Teorema

726. *El volumen de un segmento esférico es igual al producto de la altura por la semisuma de las bases más el volumen de una esfera cuyo diámetro es la altura del segmento.*





Sean V el volumen de un segmento engendrado por la revolución de $ABQP$ sobre MN; r el radio OA; $r_1 = AP$, $r_2 = BQ$, y $h = PQ$.

Demostrar que $V = \frac{1}{2}\text{h}(\pi\text{r}_1^2 + \pi\text{r}_2^2) + \frac{1}{6}\pi\text{h}^3$.

Demostración. Hallemos primero el volumen del segmento esférico engendrado por AMP.

Área de la zona $AM = 2\pi r \cdot PM$. N.° 691

$\therefore$ vol. del sector engendrado por $OAM = \frac{1}{3} r \times 2\pi r \cdot PM$. N.° 708

Pero el cono engendrado por $OAP = \frac{1}{3}\pi r_1^2 (r - PM)$. N.° 611

$\therefore$ vol. $AMP = \frac{1}{3} r \times 2\pi r \cdot PM - \frac{1}{3}\pi r_1^2 (r - PM)$.

Ahora bien, $r_1^2 = PM \times NP = PM(2r - PM)$. N.° 297

$$\therefore \text{vol. } AMP = \frac{1}{3} r \times 2\pi r \cdot PM - \frac{1}{3}\pi \cdot PM(2r - PM)(r - PM) = \pi \cdot \overline{PM}^2 (r - \tfrac{1}{3} PM).$$

Asímismo, vol. $BMQ = \pi \cdot \overline{QM}^2 (r - \frac{1}{3} QM)$.

$$\therefore V (= \text{vol. } AMP - \text{vol. } BMQ)$$
$$= \pi \cdot \overline{PM}^2 \cdot r - \tfrac{1}{3}\pi \cdot \overline{PM}^3 - \pi \cdot \overline{QM}^2 \cdot r + \tfrac{1}{3}\pi \cdot \overline{QM}^3$$
$$= \pi r (\overline{PM}^2 - \overline{QM}^2) - \tfrac{1}{3}\pi (\overline{PM}^3 - \overline{QM}^3).$$

Pero $PM - QM = h$. Por hipót.

$$\therefore V = \pi rh(PM + QM) - \tfrac{1}{3}\pi h(\overline{PM}^2 + PM \cdot QM + \overline{QM}^2).$$

Pero $h^2 = \overline{PM}^2 - 2\,PM \cdot QM + \overline{QM}^2$.

$$\therefore h^2 + 3\,PM \cdot QM = \overline{PM}^2 + PM \cdot QM + \overline{QM}^2.$$

$$\therefore V = \pi rh(PM + QM) - \tfrac{1}{3}\pi h(h^2 + 3\,PM \cdot QM).$$

Además, $(2r - PM)\,PM = r_1^2$,

y asímismo, $(2r - QM)\,QM = r_2^2$. N.° 297

$$\therefore 2r \cdot PM + 2r \cdot QM - \overline{PM}^2 - \overline{QM}^2 = r_1^2 + r_2^2.$$

$$\therefore r \cdot PM + r \cdot QM = \frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{\overline{PM}^2 + \overline{QM}^2}{2}.$$

$$\therefore V = \pi h\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{\overline{PM}^2 + \overline{QM}^2}{2} - \frac{h^2}{3} - PM \cdot QM\right)$$

$$= \pi h\left(\frac{r_1^2 + r_2^2}{2} + \frac{h^2}{2} + PM \cdot QM - \frac{h^2}{3} - PM \cdot QM\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} h(\pi r_1^2 + \pi r_2^2) + \tfrac{1}{6}\pi h^3.$$

L. C. D. D.

EJERCICIO 117

Hállense los volúmenes de los segmentos esféricos cuyas bases b *y* b′ *y alturas* h *son:*

1. $b = 4$, $b' = 5$, $h = 1$.
2. $b = 4$, $b' = 6$, $h = 1\frac{1}{4}$.
3. $b = 5$, $b' = 7$, $h = 2\frac{1}{8}$.
4. $b = 6$, $b' = 8$, $h = 1\frac{1}{2}$.
5. $b = 8$, $b' = 12$, $h = 2$.
6. $b = 12$, $b' = 15$, $h = 3\frac{1}{2}$
7. $b = 27$ cm., $b' = 32$ cm., $h = 2{,}33$ cm.

Hállense los volúmenes de los segmentos esféricos cuyos radios r_1 *y* r_2 *y alturas* h *son:*

8. $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $h = 2$.
9. $r_1 = 4$, $r_2 = 7$, $h = 3$.
10. $r_1 = 8$, $r_2 = 5$, $h = 4\frac{1}{2}$.
11. $r_1 = 5$, $r_2 = 3$, $h = 1\frac{1}{2}$.
12. $r_1 = 6$, $r_2 = 5$, $h = 1\frac{1}{4}$.
13. $r_1 = 9$, $r_2 = 10$, $h = 2\frac{3}{4}$
14. $r_1 = 9$ cm., $r_2 = 7$ cm., $a = 4{,}75$ cm.

EJERCICIO 118

Cuestionario de examen

1. El área de la base menor de un tronco de pirámide es $\frac{1}{9}$ del área de la base mayor. La altura de la pirámide completa es de 6 m. Hállese la distancia del vértice de la pirámide a la base menor del tronco.

2. Hállese, en una esfera de 16 cm. de diámetro, el área de un triángulo esférico cuyos ángulos son de 100°, 120° y 140°.

3. Dos de los ángulos de un triángulo esférico son de 80° y 120°. Hállense los límites del tercero, y demuéstrese que el área mayor posible del triángulo es cuatro veces la menor posible.

4. Dado un pedazo de una esfera rota, ¿cómo puede hallarse el radio por medio del compás y la regla?

5. El área total de un cono de revolución, en metros cuadrados, tiene por valor $200\,\pi$, y la altura es de 16 m. Hállese el volumen del cono.

6. Dos poliedros semejantes tienen volúmenes de 64 y 216 m.^{3} respectivamente. Si el área total del primero es de 112 m.^{2}, ¿cuál es la del segundo?

7. Con el metal de una esfera sólida de 12 cm. de radio se hace una hueca cuyo radio interior es también de 12 cm. ¿Cuál es el espesor?

8. El chapitel de una torre tiene forma de pirámide regular de 15 m. de altura y base exagonal de 3 m. por lado. La parte interior o hueca es de la misma forma, de 13,5 m. de altura y base de 2,7 m. por lado. Hállese el volumen del material empleado en la construcción.

9. Dados un hemisferio de 20 cm. de diámetro y un cono y un cilindro de revolución de base igual al círculo máximo del hemisferio y de volumen igual al del hemisferio, hállense la altura del cono y la del cilindro.

10. Un cono de revolución y una esfera, ambos de 5 cm. de radio, descansan sobre un plano horizontal. La altura del cono es igual al diámetro de la esfera. Hállese la posición del plano que hace en los dos sólidos secciones circulares iguales.

11. Los vértices de un tetraedro regular son los centros de las caras de otro. Hállese la relación de los volúmenes de los dos sólidos.

12. Hállese, sobre una esfera de 20 cm. de diámetro, el área de un triángulo esférico, sabiendo que la suma de los lados de su polar es de 297°.

13. Los radios de dos esferas son de 13 y 15 cm., y la distancia de los centros, de 14 cm. Hállese el volumen del sólido que les es común (*lente esférica*).

14. El área de una esfera es igual a la lateral de un cilindro de radio r y altura h. Hállense el radio y el volumen de la esfera.

15. El triedro del vértice de una pirámide triangular es trirrectángulo. Las áreas de las caras laterales son respectivamente a, b, c, y la de la base es d. Demuéstrese que $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$.

16. Suponiendo que la tierra es una esfera de 12 750 km. de diámetro, hállese el área de la zona cuyas bases están respectivamente en latitudes 30° norte y 30° sud. Demuéstrese que el volumen del segmento esférico correspondiente es $\frac{11}{16}$ del volumen de la tierra.

17. La altura y el radio de un cono de revolución son de 12 y 5 cm. Calcúlese el radio del sector de papel con que puede cubrirse la superficie lateral del cono, y también el ángulo central de dicho sector.

18. Demuéstrese que el volumen de una pirámide regular cualquiera es igual a un tercio del producto del área lateral por la perpendicular bajada del centro de la base a una cualquiera de las caras laterales.

19. Si el área de un casquete es n veces la de su base, la altura es igual al diámetro de la esfera multiplicado por $\frac{n-1}{n}$. Discútase el caso de $n = 1$.

20. Las diagonales de un cuadrilátero esférico equilátero son perpendiculares entre sí.

21. Una de las aristas laterales de una pirámide tiene 5 cm. de largo y forma con el plano de la base un ángulo de 45°. Si el área de la base es de 30 cm.^{2}, ¿cuál es el volumen de la pirámide?

22. Un cono de revolución tiene por base el círculo máximo de un hemisferio de radio r, pero está situado del lado opuesto. Los dos tienen una misma área. Hállense el lado del cono, su inclinación a la base, y el volumen del sólido formado por cono y hemisferio.

23. Hállense el área total y el volumen de un tetraedro regular de aristas de 8 cm.

24. Si un cuadrilátero esférico es inscriptible en un círculo menor, la suma de dos de sus ángulos opuestos es igual a la suma de los otros dos.

25. ¿Por qué número deben multiplicarse las dimensiones de un cilindro de revolución para obtener un cilindro semejante cuya superficie sea n veces mayor? ¿para obtener uno de volumen n veces mayor?

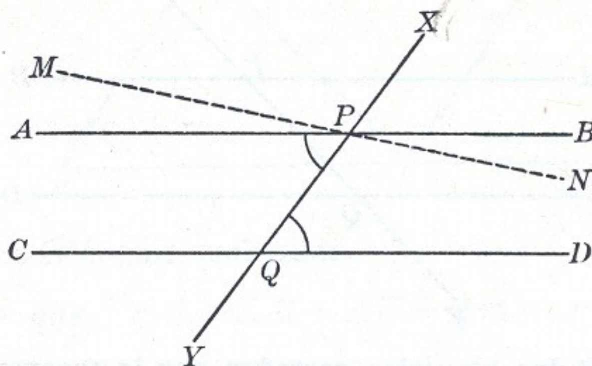
26. ¿Cuál es la relación entre el volumen de una pirámide y el de otra obtenida cortando la primera por un plano paralelo a la base y equidistante de ésta y el vértice?

27. La altura de una pirámide exagonal regular cuya base tiene 6 m. por lado es de 36 m. ¿Cuáles son las dimensiones de una semejante cuyo volumen es $\frac{1}{20}$ del de la primera?

28. Una arista lateral de una pirámide es de 4 m. ¿A qué distancia del vértice encuentra a esta arista un plano que es paralelo a la base y divide la pirámide en dos partes equivalentes?

PROPOSICIÓN XVII. TEOREMA

101. *Si dos rectas situadas en un mismo plano forman con una trasversal ángulos alternos-internos iguales, esas dos rectas son paralelas.*



Sea *XY* una trasversal que forma con las rectas *AB* y *CD* los ángulos alternos-internos iguales *APQ*, *DQP*.

Demostrar que *AB es ∥ a CD.*

Demostración. Puesto que no se sabe aún si AB es ∥ a CD, supongamos que MN es la recta que pasa por P y es ∥ a CD.

Demostraremos ahora que AB coincide con MN.

En primer lugar, $\angle MPQ = \angle DQP$. N.° 100

(*Si dos paralelas son cortadas por una trasversal, los ángulos alternos-internos son iguales.*)

Ahora bien, $\angle APQ = \angle DQP$. Por hipót.

$\therefore \angle APQ = \angle MPQ$. N.° 52, 7.°

(*Dos cantidades iguales a una tercera o a cantidades iguales son iguales entre sí.*)

$\therefore AB$ y MN deben coincidir. N.° 23

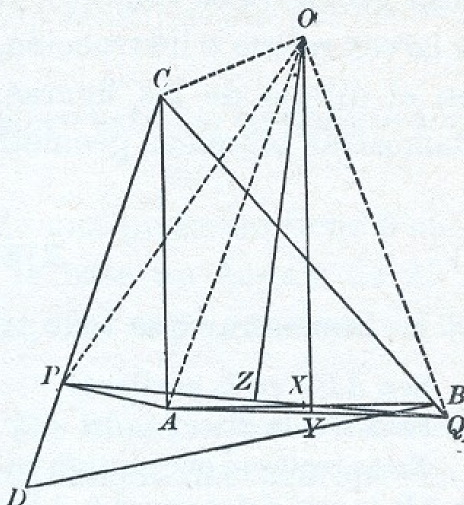
(*Definición de ángulos iguales.*)

Sabemos que MN es ∥ a CD. Por hipót.

$\therefore AB$, que coincide con MN, es ∥ a CD. L.C.D.D

Esta proposición es la recíproca de la prop. XVI. Véase el n.° 79.

3. Demostrar que parte de un ángulo es igual al ángulo entero.



Sea ABC un $\triangle$ rectángulo. Sobre la hipotenusa BC constrúyase un $\triangle$ equilátero BCD, y hágase $CP = CA$.

Por X, punto medio de AB, trácese PX y prolónguese hasta su intersección Q con la prolongación de CB. Trácese QA.

Trácense YO, ZO, ⊥s bisectrices de QA y QP; ⊥s que deben encontrarse en algún punto O, puesto que son ⊥s a dos rectas que se cortan.

Trácense OQ, OA, OP, OC.

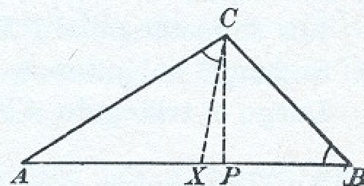
Puesto que O está en la ⊥ bisectriz de QA, $OQ = OA$.

$$\text{Asímismo, } OQ = OP; \therefore OA = OP.$$

$$\text{Pero } CA = CP, \text{ por construcción, y } CO = CO;$$

$$\therefore \text{los } \triangle\text{s } AOC, POC \text{ son iguales, y } \angle ACO = \angle PCO.$$

4. Demostrar que parte de una recta es igual a la recta entera.



En el $\triangle ABC$, trácese $CP \perp$ a AB.

Por C trácese CX de modo que $\angle ACX = \angle B$.

Los $\triangle$s ABC, ACX son semejantes.

$$\therefore \triangle ABC : \triangle ACX = \overline{BC}^2 : \overline{CX}^2.$$

Además, $\triangle ABC : \triangle ACX = AB : AX.$

$$\therefore \overline{BC}^2 : \overline{CX}^2 = AB : AX;$$

de donde $\overline{BC}^2 : AB = \overline{CX}^2 : AX.$

Ahora bien, $\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \cdot AP,$

e igualmente $\overline{CX}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AX}^2 - 2\,AX \cdot AP.$

$$\therefore \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\,AB \cdot AP}{AB} = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{AX}^2 - 2\,AX \cdot AP}{AX};$$

o sea,
$$\frac{\overline{AC}^2}{AB} + AB - 2\,AP = \frac{\overline{AC}^2}{AX} + AX - 2\,AP;$$

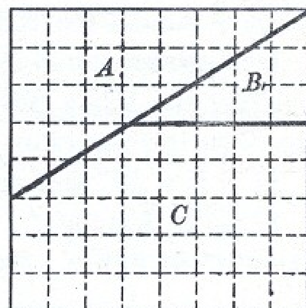
$$\therefore \frac{\overline{AC}^2}{AB} - AX = \frac{\overline{AC}^2}{AX} - AB,$$

o sea,
$$\frac{\overline{AC}^2 - AB \cdot AX}{AB} = \frac{\overline{AC}^2 - AB \cdot AX}{AX}$$

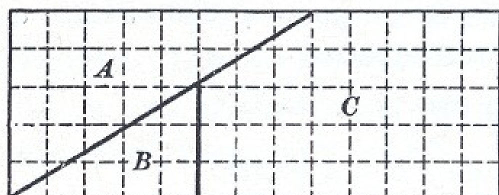
$$\therefore AB = AX.$$

5. Demostrar geométricamente que $1 = 0$.

Tómese un cuadrado de 8 unidades por lado, y divídase en tres partes A, B, C, como indica la figura de la derecha. Córtense estas partes y arréglense como indica la figura de la izquierda.



Ahora bien, el cuadrado dado contiene 8×8, ó 64, cuadrados pequeños, mientras que el rectángulo de la izquierda tiene 13 unidades de longitud y 5 de altura, y por tanto contiene 13×5, o sea 65, cuadrados pequeños.

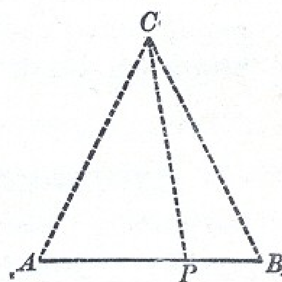


Pero cada figura es igual a $A + B + C$, y por tanto $65 = 64$; de donde, $65 - 64 = 0$, o sea, $1 = 0$.

6. Demostrar que todo punto de una recta la divide en dos partes iguales.

Sea P un punto cualquiera de AB.

Constrúyase sobre AB un $\triangle$ isósceles ABC en que $AC = BC$, y trácese PC.



En los $\triangle\triangle$ APC, PBC,

$$\angle A = \angle B,$$
$$AC = BC,$$
$$PC = PC.$$

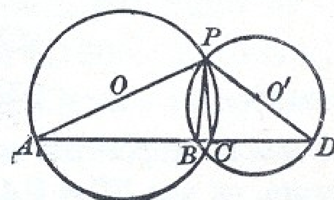
Tiénense aquí dos triángulos con tres partes independientes respectivamente iguales. Por tanto, los triángulos son iguales, y $AP = BP$.

7. Demostrar que de un punto exterior a una recta pueden bajarse a ella dos perpendiculares.

Tómense dos círculos cualesquiera que se corten. Sean O y O' los centros de estos círculos.

Sea P uno de los puntos de intersección. Trácense los diámetros PA y PD.

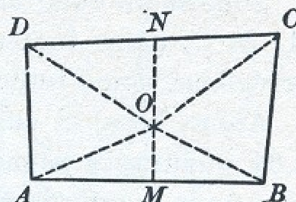
Trácese una recta $ABCD$ que corte las circunferencias en A, B, C, D. Trácense PB, PC.



El $\angle PCA$ es recto, por estar inscrito en un semicírculo. Por igual razón lo es el DBP.

Luego PB y PC son ambas $\perp$s a AD.

8. Demostrar que si dos lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, el cuadrilátero es un trapecio isósceles.



En el cuadrilátero $ABCD$, supóngase $BC = AD$.

Demostrar que AB es ∥ a DC.

Trácense MO y NO, ⊥s bisectrices de AB y CD. Sea O su intersección.

Si AB y DC son ∥s, la proposición se ha demostrado ya.

Si no lo son, MO y NO se encontrarán en un punto situado dentro o fuera de la figura. Supongamos que O esté adentro.

Trácense OA, OB, OC, OD.

Siendo OM la ⊥ bisectriz de AB, $OA = OB$.

Análogamente, $OD = OC$.

Pero $DA = BC$, por hipótesis;

$\therefore$ los △s AOD y BOC son iguales, y $\angle DOA = \angle BOC$.

Los △s rectángulos OCN, ODN son iguales;

$$\therefore \angle NOD = \angle CON.$$

Asímismo, los △s rectángulos AMO y BMO son iguales;

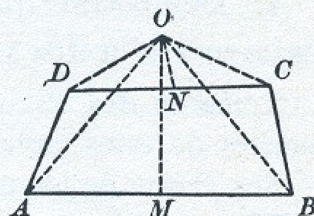
$$\therefore \angle AOM = \angle MOB.$$

$$\therefore \angle NOD + \angle DOA + \angle AOM = \angle CON + \angle BOC + \angle MOB,$$

o sea, $\angle NOM = \angle MON = 2$ rt.

Luego la línea MON es recta, y AB es ∥ a DC.

Si el punto O se halla fuera del cuadrilátero, como en la segunda figura, la demostración es análoga a la anterior.



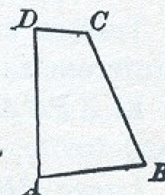
Puede demostrarse fácilmente que

$$\angle DON - \angle DOA - \angle AOM$$
$$= \angle NOC - \angle BOC - \angle MOB,$$

lo cual sólo es posible si

$$\angle DON = \angle DOM,$$

esto es, si OM coincide con ON.



Que la proposición es falsa se ve claramente en la tercera figura, en que $BC = DA$, pero AB no es ∥ a DC.

728. Bosquejo histórico de la geometría. En tiempos muy remotos toda la ciencia geométrica se reducía a las reglas que sirven para mediciones y cálculos de áreas y volúmenes sencillos; reglas que hoy se enseñan como parte o aplicación de la aritmética. Se sabía determinar el área de un rectángulo, y los documentos matemáticos más antiguos contienen disertaciones sobre los triángulos y sobre los volúmenes de los sólidos.

Los referentes a la geometría provienen de Babilonia y Egipto. Los de Babilonia se escribieron como 2000 años antes de la era cristiana en pequeñas tablas o planchas de arcilla, algunas como del tamaño de la mano, cocidas luégo al sol. Indican que sus autores tenían algunos conocimientos de agrimensura, y que probablemente habían llegado hasta determinar el área del trapecio. Sus sucesores inmediatos, así como los hebreos, empleaban 3 por valor de π en las medidas relativas al círculo.

El primer documento que da idea clara del estado de las matemáticas en el antiguo Egipto es una copia hecha en papiro por Ahmés, que probablemente floreció por los años de 1700 antes de nuestra era. El original que copió, escrito como en el año 2300, no se conoce; la copia se conserva hoy en el Museo Británico. Este manuscrito, que está casi todo consagrado a las fracciones y a una especie de álgebra tosca y primitiva, contiene algo relativo a la medida de las áreas. Da las reglas curiosas pero erróneas de que el área de un triángulo isósceles es igual a la mitad del producto de la base por uno de los lados iguales, y que el área de un trapecio isósceles de bases b y b' y lados no paralelos a es $\frac{1}{2} a (b + b')$. Obsérvase no obstante en esta obra un progreso notable en cuanto al área del círculo, de la cual se dice que es igual al cuadrado del radio multiplicado por $(\frac{16}{9})^2$, lo que da para π el valor 3,1605. Pero mucho antes de Ahmés los egipcios tenían conocimientos importantes de geometría práctica, como lo indican la construcción de las pirámides y de muchos templos y canales.

Del Egipto, y quizá también de Babilonia, la geometría pasó a las costas del Asia Menor y a Grecia. El estudio científico de ella principia con Tales, uno de los Siete Sabios, que nació en Mileto como en el año 640 y murió en el 548 antes de la era cristiana. Fue mercader en su juventud, y acumuló riqueza suficiente para consagrar al estudio los años de su edad madura. Visitó el Egipto y, según se dice, aprendió los elementos de geometría que allí se conocían. Fundó en Mileto una escuela de matemáticas y filosofía, llamada escuela jónica. El estado rudimentario en que se hallaba entonces la geometría puede inferirse del hecho de que la tradición atribuye a Tales como descubrimientos notables los cuatro teoremas dados en los n.os 60, 72, 74 y 215 de esta obra.

El discípulo más célebre de Tales, así como uno de los hombres más famosos de la antigüedad, fue Pitágoras. Nació probablemente en la isla de Samos, no lejos de la costa del Asia Menor, cerca de 580 años antes de nuestra era. Viajó mucho en su juventud; estudió con Tales en Mileto; parece que estuvo en Egipto y en Babilonia, y la tradición dice que fue hasta la India, lo cual es probable, dado el carácter de sus conocimientos matemáticos. Establecióse más tarde en Crotona, en el sur de Italia, donde fundó una escuela filosófica y una sociedad secreta para la propaganda de sus doctrinas. Dícese que fue el primero en demostrar que el cuadrado construído sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de los cuadrados construídos sobre los catetos (n.° 337). El teorema era ya conocido, al menos para casos especiales, mas parece que no se había demostrado. También es probable que a él o a sus discípulos se deban la construcción del pentágono regular (n.os 397, 398) y la de los cinco poliedros regulares. La construcción del pentágono regular exige la división de una recta en medio y extremo (n.° 311), problema que se atribuye generalmente a los pitagóricos, si bien desempeñó papel importante en la escuela de Platón. Dícese también que Pitágoras

conocía el teorema de que seis triángulos equiláteros, tres exágonos regulares o cuatro cuadrados pueden colocarse de suerte que tengan un vértice común y que los ángulos en él formados por los lados abarquen todo el plano, o 360°, mientras que no hay ningún otro polígono regular que goce de esta propiedad. Débese también a su escuela la demostración de que la suma de los ángulos de un triángulo es igual a dos rectos (n.° 107), y la construcción por lo menos de una estrella, la pentagonal, que se adoptó luégo como insignia de su cofradía.

Muchos teoremas y resoluciones se descubrieron en los dos siglos siguientes. Enópides de Chío (como 465 ant. de J. C.) demostró los procedimientos para bajar una perpendicular a una recta (n.° 227) y construír un ángulo igual a un ángulo dado (n.° 232). Pocos años después, como en 440, Hipócrates de Chío escribió el primer texto griego de matemáticas. Conocía el teorema de que las áreas de dos círculos son entre sí como los cuadrados de los radios, pero ignoraba que ángulos centrales o inscritos iguales interceptan arcos iguales.

Por los años de 430 Antífono y Brisón, dos maestros griegos, hicieron investigaciones sobre la medida del círculo. El primero trató de hallar el área doblando sucesivamente el número de lados de un polígono regular inscrito, y el segundo, aplicando el mismo procedimiento a los polígonos inscrito y circunscrito. Iban, por decirlo así, agotando la diferencia entre el círculo y el polígono, y por eso se dio a tal método el nombre de método de exhaución o de agotamiento

Durante este período (429–348 ant. de J.C.) floreció en Atenas la escuela de Platón, a la cual se deben los primeros esfuerzos sistemáticos para establecer definiciones, axiomas y postulados precisos, y para separar la geometría elemental de la superior. La elemental se restringió a las cuestiones que pueden resolverse por medio del compás y la regla, quedando así excluídos de ella el problema de construír un cuadrado equivalente a un círculo dado (la cuadratura del círculo), el de la trisección del

ángulo y el de construír un cubo de volumen doble del de un cubo dado (la duplicación del cubo), que son los tres problemas más famosos de la antigüedad. Platón y su escuela les consagraron mucho estudio a los llamados *números pitagóricos*, los cuales son números que representan los tres lados de un triángulo rectángulo. Ya Pitágoras había dado la regla de que $\frac{1}{4}(m^2+1)^2 = m^2 + \frac{1}{4}(m^2-1)^2$. La escuela de Platón halló la fórmula $[(\frac{1}{2}m)^2+1]^2 = m^2 + [(\frac{1}{2}m)^2-1]^2$. Dando diferentes valores a m se hallan grupos de números tales que el cuadrado de uno de ellos es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos.

El primer gran texto de geometría, y el más famoso de los que se conocen, fue escrito por Euclides, profesor de matemáticas en la universidad de Alejandría, cerca de 300 años antes de la era cristiana. Alejandría era entonces ciudad casi griega: había recibido su nombre en honor de Alejandro el Grande, y estaba gobernada por griegos.

La obra de Euclides se llama *Elementos*, y, según costumbre antigua, está dividida en partes llamadas *libros*. Puso aquí Euclides, arregladas en rigoroso orden lógico, todas las proposiciones geométricas importantes conocidas en su tiempo. Casi todos los tratados posteriores están fundados en el de Euclides, del cual difieren en algunas mejoras relativas al orden y enunciado de las proposiciones y a la notación empleada.

Euclides enseña poco de geometría del espacio, pues poco de ella se sabía en su tiempo. Es a Arquimedes (287–212 ant. de J. C.), célebre matemático de Siracusa, en Sicilia, a quien se deben algunos de los teoremas más importantes de la geometría del espacio, sobre todo los referentes a la esfera y el cilindro. También empleó para determinar el valor aproximado de π un método semejante al dado en el n.º 404, y demostró que π se halla entre $3\frac{1}{7}$ y $3\frac{10}{71}$. La tradición dice que sobre su tumba se esculpieron una esfera y un cilindro, en conmemoración de sus descubrimientos relativos a estos dos sólidos.

Después de esta época, los griegos no hicieron grandes progresos en la geometría elemental, aunque Apolonio de Perga, que enseñó en Alejandría entre los años 250 y 200, escribió mucho sobre las secciones cónicas, y Herón de Alejandría, cerca del principio de nuestra era, demostró que el área de un triángulo de lados a, b, c y perímetro $2p$ es igual a $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (pág. 211).

Poco debe la geometría al Oriente, aunque el álgebra le debe mucho. El primer grande escritor matemático de la India fue Aryabhatta, nacido en 476 de nuestra era, quien halló para π el valor 3,1416. Los árabes, en la época de *Las mil y una noches* (año 800 de la era cristiana), dieron grande impulso a las matemáticas, traduciendo a su idioma las obras griegas e introduciendo de la India muchos conocimientos valiosos. Fueron ellos quienes dieron a conocer los escritos de Euclides en Europa. Sin embargo, poco nuevo contribuyeron a la geometría.

En el siglo XII se tradujo la obra de Euclides del árabe al latín. No se empleó el texto griego, sea por no tenerlo o por ser escaso el conocimiento de esa lengua. Los principales traductores fueron Athelhard de Bath (1120), monje inglés que había aprendido árabe en España o en Egipto; Gerardo de Cremona, monje italiano, y Juan Campano, capellán del papa Urbano IV

Nada digno de atención agregó la Europa de la edad media a la geometría de los griegos. La primera edición latina de Euclides se imprimió en 1482; la primera traducción inglesa, en 1570.

Los signos matemáticos son comparativamente modernos: los $+$ y $-$ aparecen por primera vez en una obra alemana de 1489; el $=$, en una inglesa de 1557; los $>$ y $<$ se deben a Harriot (1560–1621), y el $\times$ a Oughtred (1574–1660).

FÓRMULAS COMUNES

729. Notación. En las fórmulas que se dan a continuación se emplea a veces (no en una misma fórmula, por supuesto) una misma letra para representar diferentes cantidades. Sin embargo, las circunstancias del caso son suficientes para impedir toda confusión. Las letras empleadas son:

a, apotema, arista.	L, área lateral.
a, b, c, lados del $\triangle ABC$.	l, lado.
b', proyección de b.	m, sección media.
b, b', bases.	$2p$, perímetro.
C, circunferencia.	r, radio.
d, diámetro, diagonal.	S, área.
h, altura.	$\pi = 3{,}1416$ ó $3\frac{1}{7}$, ambos aprox.

730. Fórmulas concernientes a valores lineales. Las fórmulas más importantes de esta clase son:

Triángulo rectángulo,	$c^2 = a^2 + b^2$ (n.° 337).
Triángulo cualquiera,	$c^2 = a^2 + b^2 \pm 2\,ab'$ (n.ºs 341, 342).
Circunferencia,	$C = 2\,\pi r = \pi d$ (n.° 385).
Radio,	$r = C : 2\,\pi = \sqrt{S : \pi}$.
Triángulo equilátero,	$h = \frac{1}{2}\,l\sqrt{3}$.
Lado de un cuadrado,	$l = \sqrt{S}$.
Diagonal de un cuadrado,	$d = l\sqrt{2}$ (n.° 339).

731. Áreas de las figuras planas. Las fórmulas más importantes de esta clase son:

Rectángulo,	bh (n.° 320).
Cuadrado,	l^2 (n.° 320).
Paralelogramo,	bh (n.° 322).

Triángulo,	$\frac{1}{2}bh$ (n.° 325), $\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
Triángulo equilátero,	$\frac{1}{4}l^2\sqrt{3}$.
Trapecio,	$\frac{1}{2}h(b+b')$ (n.° 329).
Polígono regular,	pa (n.° 386).
Círculo,	$\frac{1}{2}Cr = \pi r^2 = \frac{1}{4}\pi d^2$ (n.os 388, 389).

732. Áreas de los sólidos. Las fórmulas más importantes de esta clase son:

Prisma,	$L = 2\,ap$ (n.° 512).
Pirámide regular,	$L = ap$ (n.° 553).
Tronco de pirámide regular,	$L = a(p+p')$ (n.° 554).
Cilindro de revolución,	$L = Ch = 2\,\pi rh$ (n.° 588).
Cono de revolución,	$L = \frac{1}{2}Cl = \pi rl$ (n.° 609).
Tronco de cono de revolución,	$L = \frac{1}{2}l(C+C')$ (n.° 615).
Esfera,	$S = 4\,\pi r^2$ (n.° 689).
Zona,	$S = 2\,\pi rh$ (n.° 691).
Lúnula,	$S = \frac{\angle A}{360}\cdot 4\,\pi r^2 = \frac{\angle A}{90}\cdot \pi r^2$ (n.° 694)

733. Volúmenes. Las fórmulas principales son:

Prisma, cilindro,	bh (n.os 539, 589).
Pirámide, cono,	$\frac{1}{3}bh$ (n.os 561, 611).
Tronco de pirámide o de cono,	$\frac{1}{3}h(b+b'+\sqrt{bb'})$ (n.os 565, 617).
Cilindro de revolución,	$\pi r^2 h$ (n.° 590).
Cono de revolución,	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$ (n.° 612).
Tronco de cono de revolución,	$\frac{1}{3}\pi h(r^2+r'^2+rr')$ (n.° 618).
Prismatoide,	$\frac{1}{6}h(b+b'+4\,m)$ (n.° 725).
Esfera,	$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{1}{6}\pi d^3$ (n.° 706).
Pirámide esférica,	$\frac{1}{3}br$.
Sector esférico,	$\frac{1}{3}Sr$ (n.° 708).
Segmento esférico,	$\frac{1}{2}h(\pi r_1^2 + \pi r_2^2) + \frac{1}{6}\pi h^3$ (n.° 726)

ÍNDICE ALFABÉTICO

EFGHIJ 0698

Se acabó de imprimir este libro
el día 6 de septiembre de 1972, en los talleres de

OFFSET UNIVERSAL, S. A.
Av. División del Norte, 1521-B
México 13, D. F.

La edición consta de 3,000 ejemplares
más sobrantes para reposición.



Y todo por soñar...
por creer en ti

Gustavo Montaño Bermudez



LIBRERIA PORRUA
1900-1972

JUSTO SIERRA Y ARGENTINA
CIUDAD DE MEXICO